Районные олимпиады.

Нижегородская область

2005

-

2014

Задачи и решения.

2005-2006

8 класс

8.1. На прямой отмечено несколько точек. Между каждыми соседними точками вставили по две точки. Получили новую систему точек, состоящую из «старых» и «вставленных» точек. С новой системой проделали еще раз ту же процедуру. Могло ли в результате получиться 2005 точек?

8.2. Доказать, что для любого целого a найдется такая тройка целых чисел, что произведение любых двух из них больше третьего на a.

8.3. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M. а) Может ли угол BMC быть тупым? б) Найти угол BAC, если известно, что $\angle BMC = \frac{\angle BAM}{2}$.

8.4. Доказать, что из любых 2600 целых чисел можно выбрать два таких числа, что их разность делится на все натуральные числа до 10 включительно.

8.5. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению $s(1) \cdot s(2) \cdot \ldots \cdot s(100)$?

9 класс

9.1. Даны три положительных числа, обладающих тем свойством, что произведение любых двух из них больше третьего на одно и то же число a.

Докажите, что $a \geq -\frac{1}{4}$.

9.2. а) Можно ли разбить 2005 чисел 1,2,3,…,2005 на две части с одинаковыми суммами?
б) Можно ли разбить 2004 числа 1,2,3,…,2004 на три части с одинаковыми суммами?

9.3. Для четырехугольника *ABCD,* вписанного в окружность радиуса *R*, выполняется.
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$. Можно ли утверждать, что хотя бы одна из диагоналей *ABCD* является диаметром окружности?

9.4. Доказать, что из любых 2600 целых чисел можно выбрать два таких числа, что их разность делится на все натуральные числа до 10 включительно.

9.5. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению $s(1) \cdot s(2) \cdot \ldots \cdot s(100)$?

10 класс

10.1. Даны три положительных числа, обладающих тем свойством, что произведение любых двух из них больше третьего на одно и то же число a.
Докажите, что $a \geq -\frac{1}{4}$.

10.2. Какому наименьшему положительному числу может равняться старший коэффициент квадратного трехчлена $P(x)$, принимающего целочисленные значения при всех целых x?

10.3. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внешнюю сторону построен квадрат (т.е. *AB* – сторона этого квадрата). Пусть *O* – центр квадрата. Доказать, что отношение длины *CO* к сумме катетов *AC* + *CB* есть величина постоянная для всех прямоугольных треугольников, и найти это отношение.

10.4. Среди первых ста натуральных чисел выбрать 8 чисел так, чтобы их сумма делилась на каждое из них.

10.5. Доказать, что из любых десяти целых чисел можно выбрать два числа, разность кубов которых делится на 27.

11 класс

11.1. Решить уравнение $\arccos\frac{x+1}{2} = 2\,\mathrm{arctg}\,x$.

11.2. Какому наименьшему положительному числу может равняться старший коэффициент квадратного трехчлена $P(x)$, принимающего целочисленные значения при всех целых x?

11.3. Из данного натурального числа вычитают сумму его цифр. С полученным числом повторяют ту же процедуру, и т.д. Может ли в некоторый момент получиться число 2005?

11.4. Доказать, что из любых десяти целых чисел можно выбрать два числа, разность кубов которых делится на 27.

11.5. Дан выпуклый n-угольник. Доказать, что существует n-угольник, подобный данному, у которого длины всех сторон являются иррациональными числами.

2006-2007

8 класс

8.6. Пусть a – количество шестизначных натуральных чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 17, и b –количество шестизначных натуральных чисел, делящихся на 17, но не делящихся на 13. Найдите $a - b$.

8.7. Имеется 11кг крупы. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах отмерить 1 кг крупы, если есть одна трехкилограммовая гиря?
8.8. а) Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике найдутся две стороны, которые меньше по длине, чем наибольшая диагональ. б) Может ли быть ровно две таких стороны?
8.9. Существует ли шестизначное число, которое после умножения на 9 записывается теми же цифрами, что исходное число, но в обратном порядке?
8.10. ΔABC - прямоугольный, его гипотенуза AB и катет AC удовлетворяют неравенствам $100<AB<101$ и $99<AC<100$. Докажите, что ΔABC можно разбить менее, чем на 22 треугольника, так, что в каждом из них есть сторона длины 1.

9 класс

9.6. Пусть a – количество шестизначных натуральных чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 17, и b – количество шестизначных натуральных чисел, делящихся на 17, но не делящихся на 13. Найдите $a – b$.
9.7. Существуют ли такие целые числа x,y, что $x^2=y^2+2006$?
9.8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Оказалось, что $\angle ANB = \angle DMC = 90^0$. Докажите, что $AB=CD$.
9.9. Найти все квадратные трехчлены $P(x)=x^2+bx+c$ такие, что $P(x)$ имеет целые корни, а сумма его коэффициентов (т.е. $1+b+c$) равна 10.
9.10. ΔABC - прямоугольный, его гипотенуза AB и катет AC удовлетворяют неравенствам $100<AB<101$ и $99<AC<100$. Докажите, что ΔABC можно разбить менее,

чем на 22 треугольника, так, что в каждом из них есть сторона длины 1.

10 класс

10.6. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\frac{\pi}{2}(2x^2+1)+\cos\pi(x^2+2x)=0 .$$

10.7. Найти все квадратные трехчлены $P(x)=x^2+bx+c$ такие, что $P(x)$ имеет целые корни, а сумма его коэффициентов (т.е. $1+b+c$) равна 10.

10.8. а)Докажите, что единичный квадрат можно разбить на 2006 квадратов (укажите способ и размеры квадратов разбиения). б) Аналогичная задача для единичного куба: докажите, что его можно разбить на 2006 кубов.

10.9. В трапеции $ABCD$ точка N – середина боковой стороны CD. Оказалось, что $\angle ANB = 90^0$. Докажите, что AN и BN – биссектрисы углов A, и B соответственно.

10.10. Решить уравнение в натуральных числах: $5^x+7^y=z^2$

11 класс

11.6. Найти множество значений функции $y=|2\sin x+3\cos x+4|$

11.7. Решить неравенство $f(f(x))<(f(x))^2$, где $f(x)=2x^2-1$.

11.8. а)Докажите, что единичный квадрат можно разбить на 2006 квадратов (укажите способ и размеры квадратов разбиения). б) Аналогичная задача для единичного куба: докажите, что его можно разбить на 2006 кубов.

11.9. У многочлена $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ все коэффициенты – неотрицательные числа. Может ли $P_n(x)$ делиться на многочлен, у которого старший коэффициент положительный, а свободный член отрицательный?

11.10. Решить уравнение в натуральных числах: $5^x + 7^y = z^2$

2007-2008

8 класс

Продолжительность олимпиады – 4 часа

Максимальная оценка каждой задачи – 7 баллов

8.11. На контрольной в $8^а$ классе присутствовало девочек на три человека больше, чем мальчиков. Оценки за контрольную (по пятибалльной системе) показали, что четверок на 6 больше, чем пятерок, а троек – вдвое больше, чем четверок. Докажите, что кто-то получил за контрольную двойку или единицу.

8.12. Какое наименьшее количество цифр можно приписать справа к числу 2007, чтобы полученное число делилось на все натуральные, меньшие 10?

8.13. Петя решил перемножить на своем калькуляторе все натуральные делители числа 1024 (включая само число). Сможет ли он получить результат на экране калькулятора, имеющем 16 десятичных разрядов?

8.14. Даны треугольник и четырехугольник, про которые известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол в четырехугольнике, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

8.15. На доске написаны n чисел: $1,2,\ldots,n$. Разрешается стереть любые два числа, а вместо них написать модуль их разности. Можно ли в результате повторения $(n-1)$ раз такой операции получить на доске нуль, если а) $n = 2007$; б) $n = 10$?

9 класс

9.1. Докажите, что при всех натуральных n число $n^3+6n^2+12n+7$ является составным.

9.2. Какое наименьшее количество цифр можно приписать справа к числу 2007, чтобы полученное число делилось на все натуральные, меньшие 10?

9.3. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан. Оказалось, что $AO = BC$. Докажите, что $BO \perp OC$.

9.4. На окружности единичного радиуса отмечено 50 точек $M_1, M_2,\ldots,M_{50}$. Докажите, что на этой окружности найдутся такие диаметрально противоположные точки A, B, что квадраты расстояний удовлетворяют неравенствам

$$M_1A^2+M_2A^2+\cdots+M_{50}A^2 \le 100 \le M_1B^2+M_2B^2+\cdots+M_{50}B^2.$$

9.5. Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{222}$ представили в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$. а) Докажите, что p делится на 223. б) Докажите, что произведение pq делится на 2007.

10 класс

10.1. Дан квадратный трехчлен $P(x)=a^3x^2+b^3x+c^3$. Докажите, что если $P(x)$ имеет корни, то квадратный трехчлен $Q(x) = a^5x^2 + b^5x + c^5$ тоже имеет корни.

10.2. В треугольнике ABC угол A – наибольший. Точки M и N симметричны вершине A относительно биссектрис углов B и C соответственно. Найдите $\angle A$, если $\angle MAN = 50°$.

10.3. Докажите неравенство

$$\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_n \cos x_1 \le \frac{n}{2}$$ для

любых чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

10.4. Докажите, что у пифагорова треугольника радиус вписанной окружности является целым числом. (Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами).

10.5. Сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{222}$ представили в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$. а) Докажите, что p делится на 223. б) Докажите, что произведение pq делится на 2007.

11 класс

11.1. Решить уравнение $\sin^4 x + 1 = \cos\left(\sqrt{2}x\right)$.

11.2. Касательная к графику $y = x^2$ пересекает координатные оси Ox и Oy в точках A и B соответственно так, что $OB = 4 \cdot OA$. Найдите длину отрезка AB.

11.3. Докажите, что у пифагорова треугольника радиус вписанной окружности является целым числом. (Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами).

11.4. Найдите все многочлены $P(x)$ степени не выше второй, для которых выполняется тождество
$P(x)\cdot P(x-1)=P(x^2)$.

11.5. На сфере единичного радиуса отмечено 50 точек $M_1, M_2,\ldots,M_{50}$. Докажите, что на этой сфере найдутся такие точки A, B, что квадраты расстояний удовлетворяют неравенствам
$M_1A^2+M_2A^2+\cdots+M_{50}A^2\le 100\le M_1B^2+M_2B^2+\cdots+M_{50}B^2$
.

2008-2009

7 класс

7.1. Коля и Петя обменялись марками. До обмена у Коли было на 5 марок больше, чем у Пети. После того, как Коля обменял 24% своих марок на 20% марок Пети, у Коли стало на одну марку меньше, чем у Пети. Сколько марок было у мальчиков до обмена?

7.2 . У 92-значного натурального числа n известны первые 90 цифр: с 1-й по 10-ю – единицы, с 11-й по 20-ю – двойки, и так далее, с 81-й по 90-ю – девятки. Найдите последние две цифры числа n, если известно, что n делится на 72.

7.3. а) Можно ли числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 2, либо на 3 ? б) Аналогичная задача для ста чисел
1, 2, 3,…, 100.

7.4. В коробке 25 цветных карандашей. Известно, что среди любых пяти карандашей найдутся хотя бы два карандаша одного цвета. Докажите, что в коробке найдется 7 карандашей одного цвета.

7.5. а) Имеется 12 палочек длины 1, 2,…, 12. Можно ли сложить из этих палочек квадрат, и если нельзя, то какое наименьшее количество палочек можно сломать пополам, чтобы сложить квадрат? (Требуется использовать все палочки). б) Ответьте на те же вопросы, когда имеется 15 палочек длины 1, 2,…, 15.

8 класс

8.1. У 92-значного натурального числа n известны первые 90 цифр: с 1-й по 10-ю – единицы, с 11-й по 20-ю – двойки, и так далее, с 81-й по 90-ю – девятки. Найдите последние две цифры числа n, если известно, что n делится на 72.

8.2. Существуют ли такие нецелые числа x, y, что числа $6x + 5y$ и $13x + 11y$ – целые?

8.3. В коробке 25 цветных карандашей. Известно, что среди любых пяти карандашей найдутся хотя бы два карандаша одного цвета. Докажите, что в коробке найдется 7 карандашей одного цвета.

8.4. На клетчатом листе бумаги размером 60×70 клеток (по горизонтали и вертикали соответственно) Лена аккуратно построила график $y = 0{,}83x$ (начало координат – в центре листа, ось Ox – горизонтальная, ось Oy – вертикальная, оси проведены до границ листа). Построив график, Лена закрасила все клетки, через которые график проходит, т.е. клетки, внутри которых есть точки графика. Сколько всего закрашенных клеток?

8.5. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Оказалось, что периметр $\Delta\, AMC$ равен периметру $\Delta\, CNA$, а периметр $\Delta\, ANB$ равен периметру $\Delta\, CMB$. Докажите, что $\Delta\, ABC$ равнобедренный.

9 класс

9.6. Существуют ли такие нецелые числа x, y, что числа $6x + 5y$ и $13x + 11y$ – целые?

9.7. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^3 - 8y^3 - 6xy = 1. \end{cases}$$

9.8. У 92-значного натурального числа n известны первые 90 цифр: с 1-й по 10-ю – единицы, с 11-й по 20-ю – двойки, и так далее, с 81-й по 90-ю – девятки. Какими могут быть последние две цифры числа n, если известно, что остаток при делении n на 72 равен 39?

9.9. Существует ли выпуклый шестиугольник и точка M внутри него, такие, что все стороны шестиугольника меньше 1, а расстояние от M до любой вершины больше 1?

9.10. Во все клетки таблицы 5×5 вписали натуральные числа так, что числа в соседних клетках отличаются не более, чем на 2. Какое наибольшее количество различных чисел могло оказаться в таблице? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону).

10 класс

10.6. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^3 - 8y^3 - 6xy = 1. \end{cases}$$

10.7. Существует ли такое иррациональное число x, что $x(x+1)(x+2)$ – целое число?

10.8. Найдите все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие неравенству $|y-x|+|3x-2y|<2$.

10.9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Оказалось, что все треугольники ABM, BCM, CDM и DAM – равнобедренные. Докажите, что среди отрезков AM, BM, CM и DM найдутся хотя бы два одинаковых по длине.

10.10. Во все клетки таблицы 5×5 вписали натуральные числа так, что числа в соседних клетках отличаются не более, чем на 2. Какое наибольшее количество различных чисел могло оказаться в таблице? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону).

11 класс

11.6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5+\cos 2x = 4a + 4a\sin x$ имеет решение.

11.7. Найдите наибольший член последовательности а) $a_n = \dfrac{n}{n^2+2008}$, б) $a_n = \dfrac{2008^n}{n!}$ (где $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n$).

11.8. На координатной плоскости построен график $y = \dfrac{100}{x}$. Сколько на графике точек, касательная в которых пересекает обе координатные оси в целочисленных точках?

11.9. Существуют ли рациональные, но не целые числа x, y, для которых а) числа $2x^2+y^2$ и x^2-4y^2 целые; б) числа $2x^2+y^2$ и $3x^2-4y^2$ целые?

11.10. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Оказалось, что все треугольники ABM, *BCM*, *CDM* и *DAM* – равнобедренные. а) Докажите, что среди отрезков *AM*, *BM*, *CM* и *DM* найдутся хотя бы два одинаковых по длине. б) Может ли среди отрезков *AM*, *BM*, *CM* и *DM* быть три различных по длине?

2009-2010

7 класс

7.1. В книжном магазине Колю и Петю заинтересовала одна книга. Для ее покупки у Коли не хватало 35 рублей, а у Пети - 50 рублей. Коля попросил взаймы у Пети половину его наличности. После этого Коля сумел купить книгу и у него еще осталось 15 рублей на проезд. Сколько стоит книга?

7.2. Найдите два натуральных числа a и b, если известно, что $a < b < 2a$ и $ab = 2009$.

7.3. Предприниматель увеличил цену товара на 25%, но товар перестали покупать. На сколько процентов надо уменьшить новую цену, чтобы она стала равна первоначальной?

7.4. На шахматной доске рассмотрим всевозможные квадраты, состоящие из 9 клеток. Для каждого такого квадрата сосчитаем число черных клеток в нем, а затем сложим полученные числа. Сколько будет в результате?

7.5. Клетчатый листок бумаги размером 33×44 (клетки) требуется разрезать вдоль линий сетки на три прямоугольника так, чтобы площади прямоугольников (в порядке возрастания) относились как 1 : 2 : 3. Можно ли это сделать?

8 класс

8.1. Если первую цифру двузначного числа умножить на 3, а вторую цифру – на 9, то сумма полученных чисел будет в 4 раза больше суммы цифр исходного числа. Найдите исходное число.

8.2. Первую половину пути велосипедист ехал со скоростью V (км/час). Взглянув на часы в середине пути, он решил увеличить скорость на 20% и ехал с этой скоростью вторую половину пути. Какова средняя скорость велосипедиста?

8.3. Сколько на шахматной доске всевозможных прямоугольников, состоящих из 16 клеток?

8.4. Можно ли разрезать квадрат на меньший квадрат и 4 равных треугольника?

8.5. Имеется 5 одинаковых по виду монет, среди которых есть одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, легче или тяжелее фальшивая монета по сравнению с настоящей?

9 класс

9.1. Первую половину пути велосипедист ехал со скоростью V (км/час). Взглянув на часы в середине пути, он решил увеличить скорость на 20% и ехал с этой скоростью вторую половину пути. Какова средняя скорость велосипедиста?

9.2. Четыре положительных числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $a + b = c + d$ и $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. Докажите, что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

9.3. Имеется 5 одинаковых по виду монет, среди которых есть одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, легче или тяжелее фальшивая монета по сравнению с настоящей?

9.4. Докажете, что любой треугольник можно разрезать на три треугольника, один из которых – равносторонний.

9.5. Из ста натуральных чисел 1, 2, 3, …, 100 выбрали несколько чисел и расположили их в ряд так, чтобы произведение любых двух соседних чисел делилось на 40. Могло ли быть выбрано 40 чисел?

10 класс

10.1. Найдите количество корней уравнения $\sqrt{2009-x^2}\cdot\left(\left|1-\cos x\right|-\sin x\right)=0$.

10.2. Корни квадратного трехчлена x^2+bx+c – неотрицательные целые числа. Докажите, что если число $(c-b+1)$ – простое, то $c = 0$.

10.3. В компании из n человек надо распределить поровну миллион рублевых монет. Сколько существует различных значений n, для которых такое распределение возможно?

10.4. Из 104 первых натуральных чисел 1, 2, 3, …, 104 требуется выбрать несколько чисел и расположить их по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел делилось на 40. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать?

10.5. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $AD = b$ и углом $\angle BAD = \varphi$ На стороне AB возьмем точку M и рассмотрим отрезок между центрами описанных окружностей треугольников AMD и BMC. Докажите, что длина этого отрезка зависит лишь от a и φ (т.е. не зависит ни от положения точки M, ни от величины b).

11 класс

11.1. Найдите количество корней уравнения $\sqrt{2009-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-\cos x}-\sin x\right)=0$.

11.2. Корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c – неотрицательные целые числа. Докажите, что если число $(c-b+a)$ – простое, то $a=1$ и $c=0$.

11.3. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, из которой можно выбрать три члена (возможно, не соседние), образующие арифметическую прогрессию?

11.4. Действительные числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $a+b=c+d$ и $a^{100}+b^{100}=c^{100}+d^{100}$. Докажите, что $a^{10}+b^{10}=c^{10}+d^{10}$.

11.5. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=a$, $AD=b$ и углом $\angle BAD=\varphi$ На стороне AB возьмем точку M и рассмотрим отрезок между центрами описанных окружностей треугольников AMD и BMC. **а)** Докажите, что длина этого отрезка зависит лишь от a и φ (т.е. не зависит ни от положения точки M, ни от величины b). **б)** Найдите длину этого отрезка.

2010-2011

7 класс

7.1. Две машины едут по трассе скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

7.2. Из прямоугольника размером 8×11 клеток требуется по линиям сетки вырезать несколько квадратов так, чтобы не было одинаковых квадратов. Какое наибольшее число квадратов можно вырезать?

7.3. В шестизначном числе зачеркнули одну цифру и получили пятизначное. Из исходного числа вычли это пятизначное число и получили 654321. Найдите исходное число.

7.4. а) Имеется 9 палочек длины 1, 2, …, 9. Можно ли из них сложить равносторонний треугольник? (Палочки нельзя ломать, их можно прикладывать концами друг к другу; требуется использовать все палочки.) б) Аналогичная задача, если имеется 10 палочек длины 1, 2, …, 10.

7.5. Даны натуральные числа a и b. Обязательно ли они оканчиваются на одну и ту же цифру, если известно, что: а) числа $2a+b$ и $2b+a$ оканчиваются на одну и ту же цифру; б) числа $3a+b$ и $3b+a$ оканчиваются на одну и ту же цифру?

8 класс

8.1. Две машины едут по трассе скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

8.2. В шестизначном числе зачеркнули одну цифру и получили пятизначное. Из исходного числа вычли это пятизначное число и получили 654321. Найдите исходное число.

8.3. Дан треугольник ABC. Точка M лежит на стороне BC. Известно, что AB = BM и

$AM = MC$, угол B равен 100°. Найдите остальные углы треугольника ABC.

8.4. Какое наибольшее число ладей можно разместить на шахматной доске так, чтобы для каждой ладьи либо её горизонталь, либо её вертикаль (либо и та, и другая) были свободны от других ладей?

8.5. **а**) Даны натуральные числа a и b. Обязательно ли они имеют одинаковые остатки при делении на 10, если известно, что числа $3a+b$ и $3b+a$ имеют одинаковые остатки при делении на 10 ?

б) Даны натуральные числа a, b и c. Известно, что у чисел $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ остатки при делении на 10 одинаковые. Докажите, что у чисел a, b и c остатки при делении на 10 тоже одинаковые.

9 класс

9.1. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 100 = 0$. Найдите значение $a^4 - 201a$.

9.2. Дан треугольник ABC , точка M лежит на стороне BC. Известно, что $AB = BM$ и $AM = MC$, угол B равен 100°. Найдите остальные углы треугольника ABC.

9.3. Имеется 6 палочек длины 11, 12, 13, 14, 15, 16. Можно ли из них сложить равнобедренный тупоугольный треугольник? (Палочки нельзя ломать, их можно прикладывать концами друг к другу; требуется использовать все палочки.)

9.4. Какое наибольшее число ладей можно разместить на шахматной доске так, чтобы для каждой ладьи либо её горизонталь, либо её вертикаль (либо и та, и другая) были свободны от других ладей?

9.5. Квадрат простого числа p увеличили на 160 и получили квадрат натурального числа. Найдите p.

10 класс

10.1. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 100 = 0$. Найдите значение $a^4 - 201a$.

10.2. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC и AC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, так что $\angle B_1C_1A_1 = \angle C$, $\angle C_1A_1B_1 = \angle A$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle B$. Обязательно ли все три точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон, если известно, что серединами сторон являются по меньшей мере: **а**) две из них? **б**) одна из них?

10.3. Можно ли из 25 натуральных чисел 1, 2, …, 25 выбрать 9 различных чисел и расположить их по кругу так, чтобы сумма квадратов любых трех подряд идущих чисел делилась на 10 ?

10.4. Квадрат простого числа p увеличили на 160 и получили квадрат натурального числа. Найдите p.

10.5. У квадратного трехчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ известна сумма коэффициентов $a + b + c = 2$. Чему равна сумма коэффициентов **а**) многочлена 4-й степени $(P(x))^2$ (после возведения в квадрат и приведения подобных членов)? **б**) многочлена 20-й степени $(P(x))^{10}$?

11 класс

11.1. Найдите число корней уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = a$ в зависимости от значения a.

11.2. Решите уравнение $2\cos(\pi x) = x + \dfrac{1}{x}$.

11.3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и произвольная точка M в пространстве. Докажите,

что
$$MA^2 + MA_1^2 + MC^2 + MC_1^2 = MB^2 + MB_1^2 + MD^2 + MD_1^2.$$

11.4. У квадратного трехчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ известна сумма коэффициентов $a + b + c = 2$. Чему равна сумма коэффициентов **а**) многочлена 4-й степени $(P(x))^2$ (после возведения в квадрат и приведения подобных членов)? **б**) многочлена 20-й степени $(P(x))^{10}$?

11.5. Из 25 натуральных чисел 1, 2, …, 25 требуется выбрать несколько различных чисел и расположить их по кругу так, чтобы сумма квадратов любых трех подряд идущих чисел делилась на 10. Можно ли выбрать **а**) 8 чисел?; **б**) 9 чисел?

2011-2012

7 класс

7.1. В начале каждого летнего месяца цена товара увеличивалась. В августе цена была на 7% больше, чем в июне. Средняя цена товара за три летних месяца оказалась на 4% больше цены в июне. На сколько процентов была повышена цена в июле?

7.2. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр и получили 765. Найдите вторую цифру исходного числа.

7.3. Из доски размером 7×7 клеток вырезана центральная клетка. Можно ли оставшуюся доску разрезать по линиям сетки на "доминошки" (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных "доминошек" было одинаковым?

7.4. В спичечной коробке 40 спичек. Как, используя все спички, составить квадрат и (отдельно) равносторонний треугольник? Приведите все возможные решения.

7.5. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 65 и записывается при помощи повторения одной и той же цифры.

8 класс

8.1. В начале каждого летнего месяца цена товара увеличивалась. В августе цена товара была на 7% больше, чем в июне. Средняя цена товара за три летних месяца оказалась на 4% больше цены в июне. На сколько процентов была повышена цена в июле?

8.2. Из четырехзначного числа вычли сумму его цифр и получили 9765. Найдите вторую и третью цифры исходного числа.

8.3. На координатной плоскости начерчены два графика: $y = ax + b$ и $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ ($a > 1, b > 0$). Пусть A – точка пересечения первого графика с осью Ox, B – точка пересечения второго графика с осью Oy, C – точка пересечения графиков. Докажите, что ΔABC равнобедренный.

8.4. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Оказалось, что угол ACB тупой и $AB = CD$. Докажите, что угол ADC острый.

8.5. За круглым столом собрались рыцари и лжецы, всего 13 человек. (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Сидящие за столом знают, кто есть кто). Вновь пришедший (не садясь за стол) спросил каждого сидящего: "Рыцарь или лжец сидит справа от тебя:?" 12 человек ответили "лжец". Что ответил 13-й человек?

9 класс

9.1. Докажите неравенство $|a+1| \le a^2 + a + 1$.

9.2. На координатной плоскости начерчены два графика: $y = ax + b$ и $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ $(a > 1, b > 0)$. Пусть A – точка пересечения первого графика с осью Ox, B – точка пересечения второго графика с осью Oy, C – точка пересечения графиков. **а**) Докажите, что ΔABC равнобедренный. **б**) Может ли ΔABC быть прямоугольным?

9.3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 104 и записывается при помощи повторения одной и той же цифры.

9.4. В треугольнике ABC угол B острый. Докажите, что медиана, проведенная из вершины B, больше половины любой из сторон ΔABC.

9.5. За круглым столом собрались рыцари и лжецы, всего 13 человек. (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Сидящие за столом знают, кто есть кто). Вновь пришедший (не садясь за стол) спросил каждого сидящего: "Рыцарь или лжец сидит справа от тебя:?" 12 человек ответили "лжец". Что ответил 13-й человек?

10 класс

10.1. Докажите неравенство $|a+1| \le a^2 - a + 2$..

10.2. Можно ли 2011 представить в виде суммы нескольких (больше двух) последовательных натуральных чисел?

10.3. Дана последовательность, состоящая из n различных чисел: $a_1, a_2, ..., a_n$. Известно, что какие бы 15 членов последовательности ни взять, наименьший из них имеет наименьший номер, а наибольший из них – наибольший номер. Можно ли утверждать, что последовательность монотонно возрастающая, если: **а**) $n = 27$? **б**) $n = 26$?

10.4. Из доски размером $n \times n$ клеток вырезали 4 угловые клетки. Можно ли оставшуюся доску разрезать по линиям сетки на "доминошки" (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных "доминошек" было одинаковым, если: **а**) $n = 6$? **б**) $n = 8$?

10.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что существует тетраэдр, все грани которого представляют собой треугольники, равные треугольнику ABC.

11 класс

11.1. Сколько существует натуральных чисел n, которые удовлетворяет неравенствам $\sqrt[4]{10n} < \sqrt{n} < \sqrt[3]{100n}$?

11.2. Можно ли 2011 представить в виде суммы нескольких (больше двух) последовательных натуральных чисел?

11.3. Дана последовательность, состоящая из n различных чисел: $a_1, a_2, ..., a_n$. Известно, что какие бы 15 членов последовательности ни взять, наименьший из них имеет наименьший номер, а наибольший из них – наибольший номер. Можно ли утверждать, что последовательность монотонно возрастающая, если: **а**) $n = 27$? **б**) $n = 26$?

11.4. Решите уравнение $3\sin x + 4\cos x = 2^{x+3} + 2^{-x}$.

11.5. а) Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что существует тетраэдр, все грани которого представляют собой треугольники, равные треугольнику ABC. б) Существует ли тетраэдр, у которого в основании лежит тупоугольный треугольник, а периметры всех граней одинаковы?

2012-2013

7 класс

7.1. К числу 2012 припишите справа две цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 36. Найдите все возможные решения.

7.2. Средний возраст учительского коллектива школы, состоящего из 20 учителей, равнялся 49 годам. В новом учебном году в школу пришел еще один учитель, и средний возраст стал равен 48 годам. Сколько лет новому учителю?

7.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него, не лежащая на диагоналях. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle AMC$ или $\angle BMD$ тупой.

7.4. Петя выписал на доске подряд все натуральные числа от 1 до n и подсчитал количество всех написанных цифр. Потом он позвонил Коле и спросил: "Чему равно n, если всего выписано 2012 цифр?" Коля сказал: "Пересчитай еще раз, ты ошибся". Кто из мальчиков прав?

7.5. Сумма десяти различных натуральных чисел больше 144. Докажите, что среди этих десяти чисел найдутся три числа, сумма которых не меньше 54.

8 класс

8.1. К числу 2012 припишите справа две цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 36. Найдите все возможные решения.

8.2. Замените две звездочки двумя числами так, чтобы получилось тождественное равенство: $(3x-*)(2x+5)-x=6x^2+2(5x-*)$.

8.3. Сумма десяти различных натуральных чисел больше 144. Докажите, что среди этих десяти чисел найдутся три числа, сумма которых не меньше 54.

8.4. Даны два равнобедренных остроугольных треугольника. Известно, что у первого треугольника есть угол, равный некоторому углу второго треугольника, и есть сторона, равная некоторой стороне второго треугольника. Можно ли утверждать, что треугольники равны?

8.5. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта B 40 минут, а второй до пункта A – полтора часа. Найдите время от начала движения до встречи и отношение скоростей велосипедистов.

9 класс

9.1. Решите уравнение $|x^2-100|=2x+1$.

9.2. Дан произвольный треугольник. На двух его сторонах как на диаметрах построены круги. Докажите, что они покрывают весь треугольник.

9.3. Сумма двух положительных чисел и сумма их кубов являются рациональными числами. Можно ли утверждать, что **а)** сами числа рациональны? **б**) сумма их квадратов рациональна?

9.4. Докажите, что в остроугольном треугольнике в точке пересечения высот хотя бы одна из высот делится (считая от вершины) в отношении а) ≥ 2; б) ≤ 2.

9.5. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта B 40 минут, а второй до пункта A – полтора часа. Найдите отношение скоростей велосипедистов.

10 класс

10.1. Решите уравнение $|x^2-100|=10x+90$.

10.2. Дана треугольная пирамида *SABC* со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами *SA, SB, SC*. Докажите, что $\Delta\,ABC$ остроугольный.

10.3. Сумма двух положительных чисел и сумма их кубов являются рациональными числами. Можно ли утверждать, что **а)** сами числа рациональны? **б)** сумма их квадратов рациональна?

10.4. Биссектриса *BK* треугольника *ABC* в точке *I* пересечения биссектрис делится в отношении $BI:IK=\dfrac{10}{7}$. Может ли угол *B* быть тупым?

10.5. Докажите, что число $2^{2012}-1$ имеет не менее **а)** трех различных простых делителей, **б)** шести различных простых делителей.

11 класс

11.1. Решите уравнение $(\sin 2x-\pi\sin x)\sqrt{11x^2-x^4-10}=0$.

11.2. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $|x^2-4|=ax+6$ имеет четыре различных корня.

11.3. **а)** Дана треугольная пирамида *SABC* со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами *SA, SB, SC*. Докажите, что $\Delta\,ABC$ остроугольный. **б)** Докажите, что для любого остроугольного треугольника *ABC* можно построить треугольную пирамиду *SABC* со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами *SA, SB, SC*.

11.4. Существует ли функция *f*, определенная на множестве всех положительных чисел и удовлетворяющая тождествам $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$ и $f(2\cos x)=\cos 2x+1$?

11.5. Докажите, что число $2^{2012}-1$ имеет не менее **а**) трех различных простых делителей, **б**) шести различных простых делителей.

2013-2014

7 класс

7.1. Две соседних стороны прямоугольника относятся как 3:7. Чему равна площадь прямоугольника, если его периметр равен 40 см?

7.2. Петя сказал Васе: «Я задумал двузначное число. Если переставить его цифры, то получится число, которое в сумме с задуманным даст 143. Отгадай задуманное число, если известно, что оно простое». Какое число задумал Петя?

7.3. Дано 300-значное число 22…21…100…0, содержащее 100 двоек, 100 единиц и 100 нулей. Можно ли переставить цифры в этом числе так, чтобы получился квадрат натурального числа?

7.4. На доске записано 10 чисел: 1, 2, …, 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $a + 2b$ и $b + 2a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 10 одинаковых чисел?

7.5. В 7а классе 30 человек. Может ли оказаться так, что у каждого ученика ровно три друга в классе?

8 класс

8.1. Петя сказал Васе: «Я задумал двузначное число. Если переставить его цифры, то получится число, которое в сумме с задуманным даст 143. Отгадай задуманное число, если известно, что оно простое». Какое число задумал Петя?.

8.2. Дано сто чисел: 1, 2^2, 3^2,…, 100^2. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 3^2 - 1$, $a_2 = 4^2 - 2^2$, …, $a_{98} = 100^2 - 98^2$. Чему равна сумма всех этих разностей?

8.3. Дано 300-значное число 22…21…100…0, содержащее 100 двоек, 100 единиц и 100 нулей. Можно ли переставить цифры в этом числе так, чтобы получился квадрат натурального числа?

8.4. Существует ли равнобедренная трапеция, у которой средняя линия равна диагонали?

8.5. На доске записано 10 чисел: 1, 2, …, 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $2a + 3b$ и $2b + 3a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 10 одинаковых чисел?

9 класс

9.1. Дано сто чисел: 1, 2^2, 3^2,…, 100^2. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 3^2 - 1$, $a_2 = 4^2 - 2^2$, …, $a_{98} = 100^2 - 98^2$. Чему равна сумма всех этих разностей?

9.2. Существует ли равнобедренная трапеция, у которой средняя линия равна диагонали?

9.3. Даны положительные числа $a > b$. Можно ли утверждать, что $\sqrt{a+\sqrt[4]{b}} > \sqrt{b+\sqrt[4]{a}}$?

9.4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $C_1A_1 \parallel AC$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$.

9.5. На доске записано 10 чисел: 1, 2, …, 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $a^3 + 6b$ и $b^3 + 6a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны **а**) все 10 одинаковых чисел? **б**) хотя бы три одинаковых числа?

10 класс

10.1. Даны положительные числа $a > b$. Можно ли утверждать, что $\sqrt{a+\sqrt[4]{b}} > \sqrt{b+\sqrt[4]{a}}$?

10.2. На доске записано 10 чисел: 1^2, 2^2, …, 10^2. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций все записанные на доске числа будут больше 40?

10.3. Найдите все значения параметра a, такие, что уравнение $x^2 - 4ax + 5a = 0$ имеет два действительных корня, сумма квадратов которых равна 6.

10.4. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Точки M и N – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC соответственно. Найдите $\angle A$, если известно, что $AO = 2\,MN$.

10.5. Докажите, что уравнение $y^2 - x^4 = 2013x^5$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y.

11 класс

11.1. Решите уравнение $\cos^2(\sqrt{2}x) - \sin^2 2x = 1$.

11.2. Найдите все значения параметра a, такие, что уравнение $x^2 - 4ax + 5a = 0$ имеет два действительных корня, сумма квадратов которых равна 6.

11.3. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Найдите область определения функции $f(f(x))$.

11.4. На боковых ребрах AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию ABC. Точка D_1 лежит в основании ABC. Докажите, что объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ не превосходит $\frac{4}{27}V$, где V – объем тетраэдра $ABCD$.

11.5. Докажите, что уравнение $y^2 - x^4 = 2013x^5$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y .

2014-2015

7 класс

7.1. Велосипедист планировал доехать из пункта A в пункт B за 5 часов, двигаясь с постоянной скоростью. С намеченной скоростью он двигался до середины пути, а потом решил увеличить скорость на 25%. С новой скоростью он доехал до пункта B. Сколько времени занял весь путь?

7.2. Вася накопил 80 рублей 5-копеечными монетами. Чтобы отдать долг в 25 рублей другу, он стал отсчитывать монеты, но сбился со счета и решил использовать чашечные весы. Как ему выделить нужную сумму за 4 взвешивания, если гирек у него нет?

7.3. Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел *m* и *n* так, чтобы $0{,}07 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать?

7.4. Квадрат разрезали на два прямоугольника. Оказалось, что периметры обоих прямоугольников – целые числа. Можно ли сделать вывод, что периметр исходного квадрата также целое число?

7.5. Есть *n* палочек длины 1, 2, 3, …, *n* (см), из которых надо сложить равносторонний треугольник. Можно ли это сделать, если **а)** $n = 100$; **б)** $n = 99$? (Палочки ломать нельзя, надо использовать все палочки.)

8 класс

8.1. Велосипедист планировал доехать из пункта *A* в пункт *B* за 5 часов, двигаясь с постоянной скоростью. С намеченной скоростью он двигался до середины пути, а потом решил увеличить скорость на 25%. С новой скоростью он доехал до пункта *B*. Сколько времени занял весь путь?

8.2. Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел *m* и *n* так, чтобы $0{,}07 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать?

8.3. Дан параллелограмм *ABCD*. Точки *M* и *N* – середины сторон *BC* и *CD* соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника *AMND* к площади параллелограмма.

8.4. Имеется *n* спичек длины 1, 2, 3, …, *n* (см). Требуется сложить из них равносторонний треугольник. Можно ли это сделать, если **а)** $n = 100$; **б)** $n = 99$? (Спички ломать нельзя, надо использовать все спички.)

8.5. У Пети есть 4 медных советских монеты – по одной номиналом 1, 2, 3 и 5 копеек. Он узнал такой факт: эти монеты должны весить ровно столько граммов, каков их номинал. Петя хочет проверить этот факт с помощью чашечных весов. Сможет ли он это сделать, если у него есть всего одна гирька в 9 граммов?

9 класс

9.1. Решите уравнение $x(x-1)(x-2)+(100-x)(99-x)(98-x)=0$.

9.2. На доске записано несколько целых чисел. Коля заменил каждое число (стерев его) следующим образом: вместо четного числа он записал его половину, а вместо нечетного – удвоенное. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел и сумма исходных совпали, если сумма исходных чисел равнялась **а)** 2014; **б)** 2013?

9.3. Дан четырехугольник *ABCD*, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники *ABC* и *ADC*, касаются диагонали *AC* в одной и той же точке.

9.4. Два корабля идут по морю перпендикулярными курсами так, что оба должны пройти через фиксированную точку *O* (каждый – в свой момент времени. После прохождения точки *O* корабли, не останавливаясь, продолжат своё прямолинейное движение). Скорости кораблей одинаковы и постоянны. В полдень корабли еще не прошли точку *O* и находились от нее в 20 км и 15 км соответственно. Будут ли корабли далее в какой-то момент в зоне видимости друг друга, если видимость в этот день 4 км?

9.5. У Пети есть 4 медных советских монеты – по одной номиналом 1, 2, 3 и 5 копеек. Он узнал такой факт: эти монеты должны весить ровно столько граммов, каков их номинал. Петя хочет проверить этот факт с помощью чашечных весов. Сможет ли он это сделать, если у него есть всего одна гирька в 9 граммов?

10 класс

10.1. Решите уравнение $x(x-1)(x-2)+(100-x)(99-x)(98-x)=0$.

10.2. На доске записано несколько целых чисел. Коля заменил каждое число (стерев его) следующим образом: вместо четного числа он записал его половину, а вместо нечетного –удвоенное. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел и сумма исходных совпали, если сумма исходных чисел равнялась **а)** 2014; **б)** 2013?

10.3. Два корабля идут по морю перпендикулярными курсами так, что оба должны пройти через фиксированную точку O (каждый – в свой момент времени. После прохождения точки O корабли, не останавливаясь, продолжат своё прямолинейное движение). Скорости кораблей одинаковы и постоянны. В полдень корабли еще не прошли точку O и находились от нее в 20 км и 15 км соответственно. Будут ли корабли далее в какой-то момент в зоне видимости друг друга, если видимость в этот день 4 км?

10.4. Дан треугольник ABC. Точка P – центр вписанной окружности. Найдите угол B, если известно, что $R_{ABC}=R_{APC}$, где R_{ABC}, R_{APC} – радиусы описанных окружностей треугольников ABC и APC соответственно.

10.5. **а)** Докажите неравенство $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}<\sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел n; **б)** существует ли такое натуральное n, для которого $[\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}]<[\sqrt{9n+3}]$, где $[a]$ означает целую часть числа a?

11 класс

11.1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\sin x\cdot\big(x(x-1)(x-2)+(100-x)(99-x)(98-x)\big)}$.

11.2. В пространстве с прямоугольной системой координат дан прямоугольный параллелепипед. Известно, что все его вершины имеют целочисленные координаты, причем разные вершины лежат внутри разных октантов. Ребра параллелепипеда параллельны координатным осям. Найдите диагональ параллелепипеда, если его объем равен 2014. (Октант – это часть пространства, ограниченная тремя координатными плоскостями.)

11.3. Дан треугольник ABC. Точка P – центр вписанной окружности. Найдите угол B, если известно, что $R_{ABC} = R_{APC}$, где R_{ABC}, R_{APC} – радиусы описанных окружностей треугольников ABC и APC соответственно.

11.4. **а)** Докажите неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел n; **б)** существует ли такое натуральное n, для которого $[\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$, где $[a]$ означает целую часть числа a?

11.5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \cos x(\cos x + 1)(\cos x + 2)(\cos x + 3)$.

Решения.

2005-2006

8.16. **Ответ:** нет. **Указание.** Пусть в исходной системе было x точек, а в новой – y точек. Тогда $y + 2(y - 1) = 2005$ и $x + 2(x - 1) = y$. Из первого уравнения $y = 669$, и тогда из второго уравнения $x = \frac{671}{3}$ не является целым числом.

8.17. **Указание.** Тройка чисел (-1;-1; $1 - a$) удовлетворяет условиям (ее можно получить, составив три уравнения: и исследовав их – см. указание к задаче 9.1)

8.18. **Ответ:** а) не может; б) 120°. **Указание.** Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тогда

$$\angle BMC = 180° - \left(\frac{180° - \beta}{2} + \frac{180° - \gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

.

а) Значит, угол BMC не может быть тупым. б) из уравнения $\frac{\alpha}{4} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ получаем значение $\alpha = 120°$ (здесь мы использовали тот факт, что точка M обязана лежать на биссектрисе угла A).

8.19. **Ответ:** можно. **Указание.** Заметим, что НОК $(1,2,3,\ldots,10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Значит, из 2600 чисел можно выбрать хотя бы два, имеющих одинаковые остатки при делении на 2520. Тогда разность этих чисел делится на 1,2, …,10.

8.20. **Ответ:** 19-ю нулями. **Указание.** Рассмотрим числа из первой сотни, для которых сумма цифр делится на 5. Такие числа имеют сумму цифр либо 5, либо 10, либо 15. Чисел с суммой 5 всего 6: это

5, 14, 23, 32, 41, 50. Чисел с суммой цифр 10 всего 9: это 19, 28, …, 91. Чисел с суммой цифр 15 всего 4: это 69, 78, 87, 96. Таким образом, в произведении $P = s(1) \cdot s(2) \cdot\ldots\cdot s(100)$ множитель 5 содержится в 19-й степени. А множитель 2 в P содержится в (гораздо) большей степени (достаточно рассмотреть, например, числа с суммой цифр 8; имеется 9 таких чисел, и каждое вносит в P множитель 2^3, поэтому двойка содержится в P в степени $\geq 3\cdot 9 = 27$). Итак, P оканчивается на 19 нулей.

9.11. **Указание.** Пусть x,y,z – данные числа. Имеем 3 уравнения: $xy = z + a$, $yz = x + a$, $xz = y + a$. Вычитая из первого уравнения второе, получим, что либо $z = x$, либо $y = -1$. В силу положительности исходных чисел имеем $z = x$. Аналогично, используя третье уравнение, получим: $x = y = z$. Тогда получаем квадратное уравнение $x^2 – x – a$, дискриминант которого $(1 + 4a)$ должен быть ≥ 0, т.е. $a \geq -\frac{1}{4}$.

9.12. **Ответ:** а) нет; б) можно. **Указание.** а) Сумма 2005 чисел нечетна, поэтому искомое разбиение невозможно. б) Такое разбиение возможно. Для этого можно в первую группу взять334 пары чисел вида $(3k+1, 2004 – 3k)$, во вторую группу – 334 пары вида $(3k+2, 2003 – 3k)$ и в третью группу – 334 пары вида $(3k+3, 2002 – 3k)$, $k = 0,1,\ldots,333$.

9.13. **Ответ:** а) нет. **Указание.** Достаточно рассмотреть четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями, отличными от диаметров. К этому решению можно прийти, если ввести угловые величины дуг α, β, γ, δ, на которые разбивается окружность, и тогда

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=4R^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\right.$$

.

В скобках число 2 получается не только в случае, когда α + β = γ + δ = 180°, но и в случае, когда α + γ = β + δ = 180°.

9.14. См. 8.4.

9.15. См. 8.5.

10.11. См. 9.1.

10.12. **Ответ:** $\frac{1}{2}$. **Указание.** Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $c = P(0)$ – целое число. Подставляя $x = \pm 1$, получим, что $P(-1) + P(1) = 2a + 2c$. Значит, $2a$ – целое число, и поэтому $|a| \geq \frac{1}{2}$. Значение $a=\frac{1}{2}$ достигается, например, для трехчлена $P(x)=\frac{x(x+1)}{2}$.

10.13. **Ответ:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Указание.** Результат получается прямым подсчетом с использованием теоремы косинусов (и формулы $\cos(\alpha+45°)$) в треугольнике ACO.

10.14. **Ответ:** {1; 2; 3; 6; 12; 24; 48; 96}.

10.15. **Указание.** Из десяти чисел найдутся два, имеющие одинаковый остаток при делении на 9.

Пусть это будут числа a и b. Тогда $b = a + 9k$ при некотором целом k. Отсюда: $b^3 = a^3 + 3^3 a^2k + 3^5ak^2 + 3^6k^3$, т.е. $b^3 - a^3$ делится на 27.

11.11. **Ответ:** $x = \sqrt{2} - 1$. **Указание.** Возьмем косинус от обеих частей и воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$. В результате получим $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$. Корни этого уравнения: $x_1 = -1;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2} - 1$. Выясняя знаки чисел $\arccos\dfrac{x+1}{2}$ и $arctg\ x$ для $x = -1$ и $x = -\sqrt{2} - 1$, получим, что эти корни -- посторонние. Корень же $x = \sqrt{2} - 1$ истинный, в чем можно убедиться, показав, что $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\mathrm{arctg}(\sqrt{2} - 1)$ лежат в промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, где косинус изменяется монотонно.

11.12. См. 10.2.

11.13. **Ответ:** не может. **Указание.** Надо заметить, что сумма цифр дает тот же остаток при делении на 9, что и само число. Поэтому после первой процедуры должно получиться число, делящееся на 9, и далее делимость не 9 не может нарушиться.

11.14. См. 10.5

11.15. **Указание.** Возьмем $(n + 1)$ иррациональных чисел, равных $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{p_n}, \sqrt{p_{n+1}}$, где p_n –

n-ое простое число (это возможно, т.к. простых чисел бесконечно много). Рассмотрим $(n + 1)$ n-угольников, подобных исходному n-угольнику $A_1 A_2 \ldots A_n$ с коэффициентами подобия $\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_{n+1}}$. Если предположить, что каждый из полученных n-угольников содержит хотя бы одну сторону рациональной длины, то среди $n + 1$ таких «рациональных» сторон найдется хотя бы одна пара, соответствующая некоторой стороне A_iA_{i+1} исходного n-угольника. Тогда $\sqrt{p_k}\cdot|A_iA_{i+1}|$ и $\sqrt{p_m}\cdot|A_iA_{i+1}|$ – рациональные числа, где k и m – номера n-угольников, у которых обнаружена указанная пара сторон. Значит, отношение $\sqrt{\dfrac{p_k}{p_m}}$ также будет рациональным числом, что, очевидно, приводит к противоречию.

(Замечание: вместо чисел $\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{p_{n+1}}$ можно взять, например, числа $2^{1/2},2^{1/3},\ldots,2^{1/(n+2)}$, отношения которых также иррациональны.)

2006-2007

8.1 Ответ: 16190. Указание. Пусть c - количество шестизначных чисел делящихся одновременно на 13 и 17. Тогда $a + c$ – количество всех шестизначных чисел делящихся на 13 и поэтому

$$a+c=\left[\frac{999999}{13}\right]-\left[\frac{99999}{13}\right]=76923-7692=69231.$$

Аналогично,

$$b+c=\left[\frac{999999}{17}\right]-\left[\frac{99999}{17}\right]=58823-5882=52941.$$

Значит a – b = (a + c) – (b + c) =16290.

8.2 <u>Указание.</u> Первое взвешивание: уравновесим 3кг (гиря) + 4кг (крупы) = 7кг (крупы) (т.к. 3 + x = 11 – x => x=4). Второе взвешивание: из полученных 4кг крупы отсыпем 3кг крупы, чтобы уравновесить гирю в 3 кг. Вес оставшейся крупы – 1кг.

8.3 <u>Указание.</u> а) Из четырех углов четырехугольника *ABCD* хотя бы один – неострый (т.к. в сумме углы составляют 360^0). Пусть это будет угол *A*. Тогда в ΔABD имеем *BD* >*AB* и *BD* >*AD*. б) <u>Ответ:</u> да. Рассмотрим пример. Пусть *ABC* – равнобедренный треугольник со сторонами *AB* = *BC* = 13, *AC* = 10. Пусть *M* – середина *AC*, тогда из теоремы Пифагора *BM* = 12. Продолжим высоту *AM* и возьмем точку *D* такую, что *MD* < 1. Четырехугольник *ABCD* - искомый.

8.4 <u>Ответ:</u> существует. <u>Указание.</u> Пусть $\overline{abcdef}$ – искомое число, т.е. $\overline{abcdef}\cdot 9=\overline{fedcba}$. Тогда очевидно a = 1, b = 0 (иначе при умножении на 9 получили бы семизначное число). Поэтому f = 9, а предпоследняя цифра e = 8 (что следует из умножения столбиком). Тогда третья цифра c может быть 8 или 9. Но если c = 8, то d = 1, т.к. сумма цифр делится на 9, однако число 108189 при проверке не подходит. Если же c = 9, то d = 9 и число 109989 – единственное, удовлетворяющее условию, и при проверке оно подходит.

8.5 <u>Указание.</u> По теореме Пифагора $CB=\sqrt{AB^2-AC^2}<\sqrt{101^2-99^2}=20$. Отложим от точки *B* последовательно единичные отрезки $1=BK_1=K_1K_2=\ldots=K_{n-1}K_n$ так, что $CK_n<1$ (здесь n равно целой части длины

CB, т.е. $n < 20$). Если длина *CB* – целое число, то K_n совпадает с *C* и тогда соединив *A* с точками $K_1, K_2 \ldots K_n$ получим *n* искомых треугольников. Если же $0<CK_n<1$, то проведем единичную окружность с центром в *C* . Поскольку K_n лежит внутри, а *A* – вне этой окружности, то она пересекает отрезок AK_n в некоторой точке *M*. Тогда к указанным *n* треугольникам добавляем ΔACM и $\Delta K_n CM$ со стороной $CM=1$.

9.1 См. задачу 8.1

9.2 <u>Ответ:</u> нет. <u>Указание.</u> *x* и *y* должны быть одинаковой четности. Тогда $x^2 - y^2$ делится на 4. Противоречие.

9.3 <u>Указание.</u> Отрезок *MN* является медианой в прямоугольных треугольниках *ABN* и *CDM*. Значит гипотенузы этих треугольников равны (как удвоенные медианы).

9.4 <u>Ответ:</u> $(x-2)(x-11)$, $(x-3)(x-6)$, $x(x+9)$, $(x+4)(x+1)$

<u>Указание.</u> Пусть $x_1<x_2$ – корни. Тогда $P(x) = (x_1 - x)(x_2 - x)$ и $P(1) = 10 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из разложений числа 10 на два сомножителя получим возможные значения множителей $x_1 -1$ и $x_2 -1$, а именно: 1) 1 и 10; 2) 2 и 5; 3) –10 и –1, 4) –5 и –2. Отсюда следует результат.

9.5 См. задачу 8.5.

10.1 <u>Ответ:</u> $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. <u>Указание.</u> Записав первое слагаемое как $\cos \pi x^2$ и преобразовав сумму косинусов в произведение, получим две серии корней $2x+1=2n$ и $2x^2+2x+1=2m$ (*m,n* – целые). Положительные корни имеют вид $x = n - \dfrac{1}{2}$

и $\frac{-1+\sqrt{4m-1}}{2}$ (m,n –натуральные). Для этих серий наименьшие корни – это $\frac{1}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{2}$.

10.2 См. задачу 9.4.

10.3 Указание. а) Представим $2006=1+(2\cdot 1002+1)$ и обозначим $n=1002$. Единичный квадрат можно представить в виде объединения углового квадрата со стороной $\frac{n}{n+1}$ и «каемки» из ($2n$+1) «маленьких» квадратиков со стороной $\frac{1}{n+1}$.

б) Сначала разобьем единичный куб на 10^3 одинаковых кубов со стороной $\frac{1}{10}$, затем один из этих кубов разобьем на 10^3 одинаковых кубиков со стороной $\frac{1}{100}$ и, наконец, один из этих кубиков разобьем на 2^3 одинаковых кубиков. Итого получим 999 кубов со стороной $\frac{1}{10}$, 999 – со стороной $\frac{1}{100}$, и 8 – со стороной $\frac{1}{200}$.

10.4 Указание. Пусть M -- середина AB . Рассмотрим ΔBMN Имеем $MB=MN$ (по свойству медианы прямоугольного треугольника), поэтому $\angle NBM=\angle BNM$. Далее, $\angle BNM=\angle NBC$, т.к. средняя линия трапеции параллельна основаниям. Итак, $\angle NBM=\angle NBC$. Аналогично получим, что . $\angle NAM=\angle NAD$.

10.5 Ответ: нет решений. Указание. Поскольку 5^x оканчивается на цифру 5 при всех x, а 7^y оканчивается на 7, 9, 3 или 1, когда y имеет при делении на 4 остаток 1, 2, 3 или 0 соответственно, то y– четное число (иначе z^2 оканчивалось бы на 2 или 8). Пусть y=2t, тогда $(z - 7^t)(z + 7^t) = 5^x$. Если каждый из данных множителей делится на 5, то их разность $2\cdot 7^t$ тоже делится на 5, что невозможно. Значит $z - 7^t = 1$ и $z + 7^t = 5^x$, откуда $2\cdot 7^t = 5^x - 1$. Но правая часть делится на 4, а левая – нет. Противоречие.

11.1 Ответ: $[4-\sqrt{13},\ \ 4+\sqrt{13}]$. Указание. Преобразовав $2\sin x + 3\cos x$ с помощью дополнительного угла , получим $2\sin x + 3\cos x + 4 = \sqrt{13}\sin(x+\alpha)+4$. Наибольшее значение этого выражения $4+\sqrt{13}$, а наименьшее $4-\sqrt{13}>0$. Отсюда следует результат.

11.2 Ответ: $(-1;0)\cup(0;1)$ Указание. Пусть $y = 2x^2 - 1$. Тогда $2y^2 - 1 < y^2 \Leftrightarrow -1 < y < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x^2 < 2 \Leftrightarrow 0 < |x| < 1$.

11.3 См. задачу 10.3.

11.4 Ответ: нет. Указание. Пусть $P_n(x)$ делится на $Q(x)=ax^k+\ \ldots\ +b$, где $a>0$, $b<0$. Тогда $Q(x)$ имеет положительный корень (действительно, $Q(0)=b<0$ и $Q(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, поэтому график непрерывной функции $Q(x)$ должен пересекать положительную полуось x). Значит, $P_n(x)$ имеет тот же самый положительный корень, но это невозможно, т.к. коэффициенты $P_n(x)$ неотрицательны, а старший коэффициент положителен.

11.5 См. задачу 10.5.

2007-2008

8.1. Указание. Пусть x – число пятерок, тогда всего положительных оценок $x+(x+6)+2(x+6)=4x+18$. С другой стороны, в классе было $2m + 3$ человека, где m – число мальчиков. Поскольку числа $4x + 18$ и $2m + 3$ разной четности, они не совпадают, и значит, в классе были и плохие оценки.

8.2 Ответ. 4 цифры. Указание. Если к 2007 приписать три цифры, то получится число $\le$ 2 007 999. Разделив 2 007 999 на 2520 = НОК(1,2,…,9), получим частное 796 и остаток 2079. Поскольку 2079 > 1000, то между числами 2007000 и 2007999 нет целого кратного 2520. Значит, приписать три цифры к 2007 нельзя. Отсюда следует, что одну или две цифры тоже нельзя приписать (иначе можно было бы дописать нули до трёх цифр). Четырех цифр будет достаточно, т.к. 10000 > 2520, и поэтому между 20070000 и 20079999 есть целое кратное 2520 (наименьшее из таких чисел $20071800 = 2520\cdot 7965$).

8.3 Ответ. Не сможет. Указание. Натуральные делители числа $1024 = 2^{10}$ – это числа 1, 2^1, $2^2,\ldots,$ 2^{10}. Их произведение равно $2^{1+2+,,,+10} = 2^{55}$. Поскольку $2^{10} > 10^3$ и $2^5 > 10$, то $2^{55} = (2^{10})^5 \cdot 2^5 > (10^3)^5\cdot 10 = 10^{16}$, т.е. 2^{55} записывается не менее чем 17 цифрами.

8.4 Указание. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Если предположить, от противного, что все эти углы различны, то числа $(\alpha + \beta)$, $(\beta + \gamma)$ и $(\alpha + \gamma)$ будут различными, и в четырехугольнике будет три разных вершины с такими углами. Сумма этих трех углов равна $2\cdot 180° = 360°$, но это противоречит тому, что в четырехугольнике сумма всех четырех углов равна 360°.

8.5 Ответ. а) Можно; б) нельзя. Указание. а) Вычтем 3–2, 4–3, … , 2007–2006. В результате этих 1003 операций на доске окажется 1004 единицы. Вычитая 502 раза соседние единицы, получим 502 нуля, а из них после 501 операции получим один нуль. б) Заметим, что четность суммы чисел на доске после любой операции та же, что и до операции (т.к. числа $a + b$ и $a - b$ одной четности, где a, b – числа, участвующие в операции). Вначале сумма была нечетной, значит, нулевой она стать не может.

9.1 Указание. Представим выражение в виде $(n+2)^3-1=(n+1)(n^2+5n+7)$, где, очевидно, каждый сомножитель больше 1.

9.2 Ответ. 4 цифры. См. указание к задаче 8.2.

9.3 Указание. Пусть M – середина стороны BC. Тогда $2\cdot OM = AO$ по свойству точки пересечения медиан. Поскольку $AO=BC$, в треугольнике BOC медиана OM равна половине стороны BC, и значит, $\angle BOC = 90°$. (Можно рассмотреть окружность с центром M радиуса OM, тогда BC – диаметр этой окружности, а угол BOC на него опирается).

9.4 Указание. Пусть AB – произвольный диаметр окружности. Тогда для любой точки M_i по теореме Пифагора имеем $M_iA^2+M_iB^2=4$. Просуммировав такие равенства для всех 50 точек, получим

$$(M_1A^2+M_2A^2+\cdots M_{50}A^2)+(M_1B^2+M_2B^2+\cdots+M_{50}B^2)=200$$

.

В случае, когда сумма в первой скобке ≤ 100, сумма во второй скобке будет ≥ 100, и утверждение доказано. В противном случае мы можем поменять ролями A и B (т.к. числа в скобках положительны).

9.5 Указание. а) Сложив любую симметрично расположенную пару дробей, получим дробь с числителем 223. Далее при сложении всех 111 полученных дробей, в результат будет дробь, у которой простое число 223 в числителе не может сократиться с меньшими множителями знаменателя. б) Осталось доказать, что q делится на 9 (а на самом деле, q будет делиться на 27). Обозначим $n = 222$.. Если не заботиться о приведении к несократимому виду, то при сложении исходных дробей в знаменателе можно получить $n!$. Обозначим через k наибольшую степень тройки, на которую делится $n!$, такая степень называется содержанием тройки в числе $n!$ (можно подсчитать его значение: $k = [n/3] + [n/9] + [n/27] + [n/81] = 108$). Для такого знаменателя $q' = n!$ соответствующий числитель p' имеет два слагаемых $n!/81$ и $n!/162$ с наименьшим содержанием $k - 4$, сумма этих слагаемых $n!/54$ имеет содержание $k - 3$. Следующие (по возрастанию содержания) слагаемые: $n!/27$, $n!/54$, $n!/(27\cdot4)$, $n!/(27\cdot5)$, $n!/(27\cdot7)$ и $n!/(27\cdot8)$ имеют в сумме содержание $\geq k - 2$, что следует из сложения каждой из трех последовательных пар (а на самом деле, можно подсчитать, что содержание равно k). Все остальные слагаемые числителя p' имеют содержание не меньше $k - 2$. Таким образом, числитель p' имеет содержание $k - 3$, и поскольку содержание знаменателя q' равно k, то в несократимой дроби знаменатель делится на 27.

10.1 Указание. Имеем $b^6 \geq 4a^3c^3$, т.к. P(x) имеет дискриминант ≥ 0. Требуется доказать, что $b^{10} \geq 4a^5c^5$. Если $ac \leq 0$, то последнее неравенство очевидно. Если же $ac > 0$, то из неравенства $(b^2)^3 \geq 4(ac)^3$ в силу монотонного возрастания функции $y = x^{5/3}$ получим
$(b^2)^5 \geq 4^{5/3}\cdot(ac)^5 > 4(ac)^5$.

10.2 Ответ. 80°. Указание. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тогда $\angle AMB = 90° - \frac{\beta}{2}$, $\angle ANC = 90° - \frac{\gamma}{2}$ (т.к. треугольники

AMB и ANC равнобедренные). Поэтому

$$\angle MAN = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Из условия задачи $90° - \frac{\alpha}{2} = 50°$, значит, $\alpha = 80°$.

10.3 Указание. Поскольку для любых a, b выполняется $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$, то применяя это неравенство к каждому произведению вида $\sin x_i \cos x_{i+1}$ и затем группируя слагаемые $(\sin^2 x_i + \cos^2 x_i)/2=1/2$, получим результат.

10.4. Указание. Пусть a, b – катеты, c – гипотенуза, r – радиус вписанной окружности. Тогда $r = \frac{a+b-c}{2}$ (формула следует из рассмотрения отрезков, на которые делятся стороны точками касания). Поскольку $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, то числа c и $(a + b)$ одинаковой четности. Отсюда следует результат.

10.5 . См. указание к задаче 9.5.

11.1 Ответ. $x = 0$. Указание. Левая часть уравнения ≥ 1, а правая ≤ 1. Значит, уравнение равносильно системе: $\sin x = 0,\ \cos\sqrt{2}x = 1$. Имеем $x = \pi n$, $\sqrt{2}x = 2\pi k$ (n, k – целые). Отсюда $n = k\cdot\sqrt{2}$. Поскольку $\sqrt{2}$ – число иррациональное, последнее равенство возможно лишь при $n = k = 0$.

11.2 Ответ. $\sqrt{17}$. Указание. Будем считать, что точка касания имеет положительную абсциссу x_0 (в случае $x_0 < 0$ изменится только знак абсциссы точки A). Тогда из геометрического смысла касательной имеем $y'(x_0) = 4$, т.е

$2x_0 = 4$, и точка касания есть $(x_0, y_0) = (2;4)$. Из уравнения касательной $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ будем иметь $y - 4 = 4(x - 2)$ и отсюда получим координаты точек пересечения касательной с осями: $x_A = 1$ и $y_B = -4$. Значит, $AB = \sqrt{x_A^2 + y_B^2} = \sqrt{17}$.

11.3 См. указание к задаче 10.4.

11.4 <u>Ответ</u>. $P_1(x) = x^2 + x + 1,\ P_2(x) = 1,\ P_3(x) = 0$. <u>Указание</u>. Запишем $P(x) = ax^2 + bx + c$ с неизвестными коэффициентами *a,b,c*. При $a = b = 0$ получается многочлен нулевой степени $P(x) = c$, где из условия задачи $c^2 = c$, т.е. $c = 0$ или $c = 1$. При $a = 0$, $b \neq 0$ имеем тождество $(bx + c)(bx - b + c) = bx^2 + c$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим три уравнения с двумя неизвестными b и c, а именно: $b^2 = b$; $2bc - b^2 = 0$; $c^2 - bc = c$. Из первого уравнения $b = 1$, и для c получаются два противоречивых уравнения, т.е. требуемых многочленов первой степени не существует. При $a \neq 0$ аналогично получим пять уравнений на a, b, c, которые имеют единственное решение $a = b = c = 1$ (сначала из сравнения коэффициентов при x^4 получим a = 1, затем из сравнения коэффициентов при x^3 получим b = 1, и далее из сравнения свободных членов c = 1 или c = 0,.при проверке только c = 1 подходит).

11.5. <u>Указание</u>. См. рассуждения в задаче 9.4. В качестве точек *A* и *B* можно взять любые диаметрально противоположные точки сферы (затем, возможно, поменяв *A* и *B* местами). При аналогичном доказательстве здесь используется то, что окружность, проходящая через *A, B* и отмеченную точку, является окружностью большого круга (значит, она имеет радиус 1)..

2008-2009

7.1 **<u>Ответ.</u>** У Пети было 45 марок, у Коли – 50 марок. **<u>Указание</u>.** Пусть до обмена у Пети было x марок, тогда у Коли было (x + 5) марок. После обмена у Пети стало $x-\frac{x}{5}+(x+5)\cdot\frac{6}{25}$, а у Коли $x+5-(x+5)\cdot\frac{6}{25}+\frac{x}{5}$. Решая уравнение

$$x-\frac{x}{5}+(x+5)\cdot\frac{6}{25}-x-5+(x+5)\cdot\frac{6}{25}-\frac{x}{5}=1,$$

находим $x = 45$.

7.2 **<u>Ответ</u>**. 36. **<u>Указание</u>.** Обозначим последние цифры x и y. Число n должно делиться на 9 и 8. Число, состоящее из первых 90 цифр, делится на 9, так как его сумма цифр делится на 9. Значит, и число $\overline{xy}$ делится на 9. Кроме того, по признаку делимости на 4, число $\overline{xy}$ делится на 4. Поэтому $\overline{xy}$ равно либо 00, либо 36, либо 72. Поскольку n делится на 8, то число $\overline{9xy}$ (состоящее и последних трех цифр) делится на 8. Из чисел 900, 936 и 972 только 936 обладает этим свойством.

7.3 **<u>Ответ.</u>** а) Можно: например так: 1,3,6,8,5,2,4,7; б) Можно: например так: <u>1,3,5,2,4</u>, <u>6,8,10,7,9</u>,…. **<u>Указание</u>**. а) Построить пример помогает граф возможных соседей. б) Очередная пятерка чисел $5k + 1$, $5k + 3$, $5k + 5$, $5k + 2$, $5k + 4$ предшествует следующей пятерке $5(k + 1) + 1$, $5(k + 1) + 3$, $5(k + 1) + 5$, $5(k + 1) + 2$, $5(k + 1) + 4$ и так далее.

7.4 **<u>Указание</u>**. Из условия задачи следует, что карандаши имеют не более 4 цветов. Тогда по принципу Дирихле (или рассуждая от противного) получим, что найдутся 7 карандашей одного цвета (иначе было бы всего не более $6 \cdot 4 = 24$ карандаша).

7.5 **Ответ.** а) 2 палочки; б) Можно. **Указание.** а) Так как сумма $1 + 2 + \ldots + 12 = 78$ не делится на 4, то сложить квадрат нельзя. Сторона квадрата должна быть $\frac{78}{4} = 19{,}5$. Если сломать только одну палочку, то ее части могут оказаться на двух разных сторонах квадрата, а другие две стороны не смогут иметь нецелую длину. Значит, надо сломать как минимум две палочки. С двумя сломанными палочками можно сложить квадрат. Например, сломаем пополам палочки длины 1 и 3. Тогда квадрат можно сложить так: $(\frac{1}{2} + 12 + 7)$, $(\frac{1}{2} + 11 + 8)$, $(\frac{3}{2} + 10 + 2 + 6)$, $(\frac{3}{2} + 9 + 5 + 4)$.

б) Квадрат можно сложить, например, так: $(15 + 14 + 1)$, $(13 + 12 + 5)$, $(11 + 10 + 9)$, $(8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2)$.

8.1 **Ответ.** 36. См. задачу 7.2.

8.2 **Ответ.** Не существуют. **Указание**. Пусть $6x + 5y = m$, $13x + 11y = n$, где m и n – целые. Решим эту систему уравнений, домножив первое уравнение на 11, а второе – на 5. Вычитая уравнения, получим $x = 11m - 5n$, т.е. x - целое число.

8.3 См. задачу 7.4.

8.4 **<u>Ответ.</u>** 108. **<u>Указание</u>**. График проходит в первом и третьем квадрантах. Подсчитаем число закрашенных клеток в первом квадранте (в третьем их будет столько же). График пересекает 29 вертикальных прямых сетки: $x = 1$, $x = 2$, …, $x = 29$ (внутри квадранта) и 24 горизонтальных прямых: $y = 1$, $y = 2$, …, $y = 24$ (т.к. при $x = 30$ значение y= 24,9). Заметим также, что точки пересечения с этими прямыми не являются узлами сетки, т.к. $0{,}83x$ не является целым числом при $x = 1, 2, …,29$. Таким образом, внутри квадранта всего 29 + 24 = 53 точки пересечения с линиями сетки, а отрезков, на которые разбивается график этими точками, получится 54. Каждый такой отрезок соответствует закрашиваемой клетке (которой он принадлежит). Итого, в обоих квадрантах будет 108 закрашенных клеток.

8.5 **<u>Указание</u>**. Будем обозначать периметр буквой P. Из условия задачи имеем $P(\Delta AMC) + P(\Delta CMB) = P(\Delta CNA) + P(\Delta ANB)$. Отсюда $P(\Delta ABC) + 2 \cdot CM = P(\Delta ABC) + 2 \cdot AN$. Значит $CM = AN$. Из этого соотношения, учитывая равенство периметров треугольников AMC и CAN, получим, что $AM = NC$. Поэтому треугольники AMC и CAN равны по трем сторонам. Тогда $\angle A = \angle C$, значит, ΔABC равнобедренный.

9.1 **<u>Ответ.</u>** Не существуют. См. задачу 8.2.

9.2 **<u>Ответ.</u>** Множество решений представляет собой прямую $y = \dfrac{x-1}{2}$. **<u>Указание.</u>** Второе уравнение есть следствие первого, так как

$$x^3-8y^3-6xy=(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)-6xy=$$
$$=x^2+2xy+4y^2-6xy=(x-2y)^2=1.$$

9.3 <u>Ответ</u>. 75 или 03. **<u>Указание</u>**. Рассмотрим число n – 39. Рассуждая так же, как при решении задачи 7.2, получим, что если $\overline{xy}\geq 39$, то $\overline{xy}$= 36 + 39 = 75. Если же $\overline{xy}$ < 39, то трехзначное число, состоящее из последних трех цифр числа n – 39 будет равно 864 (= 936 – 72). Таким образом, в этом случае у числа n последние три цифры 903 (= 864 + 39).

9.4 <u>Ответ.</u> Не существует. **<u>Указание</u>**. Допустим, что такой шестиугольник *ABCDEF* существует. Рассмотрим 6 треугольников, основания которых – соответствующие стороны шестиугольника, а вершина – точка *M*. Тогда хотя бы в одном из этих треугольников угол при вершине *M* ≥ 60° (т.к. сумма всех шести углов равна 360°). Пусть, для определенности, $\angle AMB \geq 60°$. Тогда хотя бы один из углов при основании треугольника *AMB* (скажем, $\angle BAM$) меньше или равен 60°. Но тогда для углов *AMB* и *BAM* получается противоречие с тем, что против большего угла в треугольнике лежит большая сторона (или противоречие с тем, что против равных углов лежат равные стороны).

9.5 <u>Ответ.</u> 15. **<u>Указание</u>**. Будем использовать шахматную нотацию для обозначения клеток. Расстояние между двумя клетками будем понимать как сумму модулей разностей координат их центров, т.е. расстояние – это длина минимального пути, проходящего через центры соседних клеток (сторону клетки считаем единицей). Расстояние будем обозначать через r. Таким образом, наибольшее расстояние будет между противоположными угловыми клетками, оно равно 8. (Так, r(a1,e5) = 8 и путь длины 8 из a1 в e5 получается, если каждый раз поворачивать вправо или вверх). Можно считать, что наименьшее число, записанное в клетках, равно единице (иначе уменьшим числа во всех клетках на одинаковую величину). Если единица записана не в угловой клетке, то расстояние от этой клетки до любой другой ≤ 7, и поэтому в любой клетке записано число, не превосходящее $1 + 2 \cdot 7 = 15$.

Пусть теперь единица находится в угловой клетке, скажем, в a1; обозначим это так: a1 = 1. Тогда во всех клетках, кроме e5, числа не превосходят 15 (так как расстояние от a1 до них ≤ 7), а e5 ≤ 17. Если e5 = 17, то во всех остальных клетках числа однозначно определены: a2 = b1 = 3 (действительно, r(a2,e5) = 7 и поэтому a2 ≥ 3; но с другой стороны, r(a2,a1) = 1 и поэтому a2 ≤ 3; аналогично b1 = 3), и точно так же получается a3 = b2 = c1 = 5 и так далее таблица однозначно заполняется по диагоналям последовательными нечетными числами. Таким образом, в таблице окажется 8 различных чисел. Если же e5 = 16, то могут быть два случая: либо в таблице нет числа 2, либо двойка присутствует. В первом случае всего в таблице будет не более 15 чисел. Рассмотрим второй случай. Тогда либо a2 = 2, либо b1 = 2 (иначе расстояние от клетки с двойкой до e5 меньше 7). Пусть для определенности a2 = 2. Далее, в силу тех же рассуждений, числа в клетках выше первой строки определяются однозначно (см. рис. слева) и тогда во всей таблице получится не более 13 различных чисел.

8	9	12	14	16
6	8	10	12	14
4	6	8	10	12
2	4	6	8	10
1	*	*	*	*

8	9	11	13	15
6	8	10	12	14
4	6	8	10	12
2	4	6	8	10
1	3	5	7	8

Итак, во всех рассмотренных случаях мы имели не более 15 различных чисел в таблице. Пример для 15 чисел приведен на рисунке справа.

10.1 **Ответ.** Множество решений представляет собой прямую $y = \frac{x-1}{2}$. См. задачу 9.2.

10.2 **Ответ.** Существует. **Указание.** Обозначим $P(x) = x(x+1)(x+2) - 1$ и рассмотрим уравнение P(x) = 0. Поскольку P(0) = –1 и P(1) = 5 , то на интервале (0;1) уравнение имеет корень. Обозначим его x_0 и покажем, что x_0 – иррациональное число. В противном случае $x_0 = \frac{p}{q}$, где p, q – взаимно простые натуральные числа, и тогда $p(p+q)(p+2q) = q^3$. Если $q \neq 1$, то из взаимной простоты p и q следует, что в левой части все множители взаимно просты с q и значит, их произведение не может делиться на q (и тем более на q^3). Если q = 1, то очевидно, что уравнение $p(p+q)(p+2q) = 1$ не имеет натуральных решений.

10.3 Ответ. (0;0), (1;1), (–1;–1), (2;3), (–2;–3). **Указание.** Поскольку каждое из слагаемых – неотрицательное число, то либо оба они равны 0, либо среди них одно равно 0, а другое – единице. В результате получим пять случаев линейных систем:

1) $\begin{cases} y-x=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$ 2), 3) $\begin{cases} y-x=0 \\ 3x-2y=\pm 1 \end{cases}$ 4), 5) $\begin{cases} y-x=\pm 1 \\ 3x-2y=0. \end{cases}$

Каждая система дает свое решение.

10.4 Указание. Поскольку $\angle AMB$ + $\angle BMC$ + $\angle CMD$ + $\angle DMA$ = 360°, то хотя бы один из этих углов неострый. Пусть, для определенности, $\angle AMB \geq 90°$. Тогда $AB > AM$ и $AB > BM$. Значит, равными сторонами в Δ AMB являются AM и BM.

10.5 См. задачу 9.5.

11.1 Ответ. $a \geq 0.5$. **Указание**. Введя новую переменную $t = \sin x$ (где $|t| \leq 1$) и применяя формулу для косинуса двойного угла, получим уравнение $t^2 + 2at + 2a - 3 = 0$. Требуется найти параметры a, для которых это уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [– 1; 1]. Обозначим квадратный трехчлен в левой части уравнения через $f(t)$. Значение $f(-1) = 1 - 2a + 2a - 3 = -2 < 0$. Поэтому то условие, что на отрезке [– 1; 1] находится корень квадратного трехчлена $f(t)$, равносильно неравенству $f(1) \geq 0$ (поскольку ветви $f(t)$ направлены вверх). Таким образом, $f(1) = 1 + 2a + 2a - 3 = 4a - 2 \geq 0$, т.е. $a \geq 0.5$.

11.2 **<u>Ответ</u>**. а) $a_{45} = \dfrac{45}{4033}$, б) $a_{2007} = a_{2008} = \dfrac{2008^{2007}}{2007!}$.

<u>Указание</u>. а) Преобразуя неравенство

$a_n = \dfrac{n}{n^2 + 2008} < \dfrac{n+1}{(n+1)^2 + 2008} = a_{n+1}$, получим $n^2 + n <$ 2008.

Это неравенство выполняется, как легко проверить, при n=44 и не выполняется при n=45. В силу монотонного возрастания функции $n^2 + n$ (при положительных n) получим, что a_{45} – наибольший член последовательности.

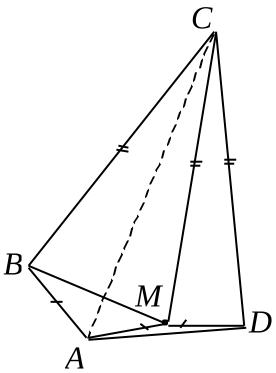
Замечание. Другой способ решения состоит в исследовании формулы общего члена с помощью производной. Для найденной точки максимума x надо сравнить значение функции в двух целых точках, ближайших к x слева и справа.

б) Аналогично сравнивая выражения для a_n и a_{n+1} и сокращая неравенство на $\dfrac{2008^n}{n!}$, получаем n+1<2008. Значит, a_n возрастает при n<2007, значения a_{2007} и a_{2008} совпадают, а при n>2008 a_n убывает.

11.3 **<u>Ответ</u>**. 30. **<u>Указание</u>**. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) к гиперболе *y=100 / x* имеет вид $y - y_0 = -(100 / x_0^2)(x - x_0)$, где $y_0 = 100 / x_0$. Из этого уравнения получаются координаты точек пересечения с осями Ох и Оу соответственно: $x_1 = 2x_0$ и $y_1 = 2y_0$. Значит, $2x_0$ – целое число; обозначим его через *n.* Тогда $y_1 = 2y_0 = 400 / n$. Таким образом, *n* может принимать значение любого делителя числа *400.* Натуральных делителей числа 400 всего 15 (можно непосредственно выписать эти 15 делителей, либо, записав 400 в виде произведения простых чисел: $400 = 2^4 \cdot 5^2$, найти количество натуральных делителей как (4+1)(2+1)=15). С учетом отрицательных делителей (соответствующих касательным в третьей четверти), получим всего 30 точек

11.4 **__Ответ.__** а**)** **С**уществуют. б) Нет. **Указание**. а) Можно привести пример x= 2/3 , y=1/3. б) Рассуждая так же, как в решении задачи 8.2, получим, что $11x^2$ есть целое число. Поскольку по предположению x = p/q , где p и q – взаимно простые целые числа, то отсюда следует, что 11 делится на q^2 . Но это возможно лишь при |q| = 1.

11.5 **__Ответ.__** б) Может. **__Указание.__** а) См. задачу 10.4. б) См. пример на рисунке. При построении примера расположим отрезки CD=DM под небольшим углом друг к другу. Затем построим равнобедренный тупоугольный треугольник AMD, в котором AM=MD; при построении можно сделать угол CDA прямым. Отразив точку M симметрично относительно прямой AC, получим точку B. Нетрудно показать, что при малых углах MCD отрезки MD и MB малы, но не равны друг другу; точнее, отношение MB к MD стремится к 2, когда угол MCD стремится к нулю.



2009-2010

7.1 **Ответ.** 150 рублей. **Указание.** Если x – цена книги, то у Коли было
(x – 35) рублей, а у Пети (x – 50) рублей. Составив уравнение $x-35+\frac{x-50}{2}=x+15$ и решив его, находим x = 150.

7.2 **Ответ.** 41 и 49. **Указание.** Разложив 2009 на простые множители $2009 = 7\cdot 7\cdot 41$, видим, что условию задачи удовлетворяют лишь делители $a = 41$ и $b = 7^2 = 49$.

7.3 **Ответ.** На 20%. **Указание.** Если старая цена была равна a, то новая равна $\frac{5}{4}a$. Чтобы вернуться к первоначальной цене, надо уменьшить новую цену на $\frac{1}{4}a$, что составляет $\left(\frac{1}{4}a\right):\left(\frac{5}{4}a\right)=\frac{1}{5}=20\%$.

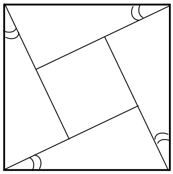
7.4 **Ответ.** 162. **Указание.** Введем систему координат: ось Ox вдоль нижнего края доски, ось Oy – вдоль левого края, единица масштаба – сторона клетки. Любой квадрат 3×3 определяется координатами $(x; y)$ его левой нижней вершины. Значения $(x; y)$ могут быть любые среди целых чисел от 0 до 5. Таким образом, имеем $6\cdot 6 = 36$ упорядоченных пар $(x; y)$, т.е. всего есть 36 квадратов 3×3. В каждом таком квадрате либо 5, либо 4 черных клетки в зависимости от цвета угловой клетки квадрата. Но в любом горизонтальном слое 3×8 квадраты с четырьмя и пятью черными клетками чередуются, и подсчет искомой суммы в каждом слое даёт (5+4) 6/2= 27. А в шести горизонтальных слоях искомая сумма будет равна $27\cdot 6 = 162$.

7.5 <u>Ответ.</u> Можно (см. рисунок).

8.1 <u>Ответ.</u> 51. **<u>Указание</u>.** Пусть x – первая цифра, y – вторая цифра. Из условия задачи имеем $3x + 9y = 4(x + y)$, т.е. $x = 5y$. Поскольку первая цифра не равна 0, получаем $x = 5$, тогда $y = 1$.

8.2 <u>Ответ.</u> $\frac{12}{11}\mathrm{V}$. **<u>Указание</u>.** Если длину пути обозначить за s, то средняя скорость равна: $\dfrac{S}{\frac{S}{2}\Big/\mathrm{V} + \frac{S}{2}\Big/\left(\frac{6}{5}\mathrm{V}\right)} = \dfrac{12}{11}\mathrm{V}$.

8.3 Ответ. 39. **Указание.** Рассуждая аналогично тому, как сделано в решении задачи 7.4, получим $25 = (8 - 4 + 1)^2$ квадратов 4×4; 7 прямоугольников 8×2 (горизонтальных) и 7 прямоугольников 2×8 (вертикальных). Итого: 25 + 7 + 7 = 39.



8.4 Ответ. Можно. **Указание.** См. рисунок. Из вершин квадрата проведены прямые под равными углами. Тогда по второму признаку равенства треугольников получаются 4 равных прямоугольных треугольника, откуда следует, что четырехугольник внутри квадрата – тоже квадрат.

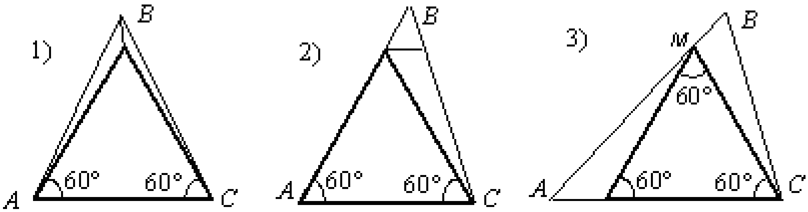
8.5 Указание. Первым взвешиванием сравним по две монеты и в случае равновесия получаем, что все четыре монеты на весах настоящие, и тогда вторым взвешиванием сравним пятую (фальшивую) монету с настоящей. В случае же неравновесия вторым взвешиванием сравним между собой по одной монете из перевесившей пары: если будет равновесие, то фальшивая монета – более легкая (она находится в другой, «легкой» паре), а при неравенстве – фальшивая монета более тяжелая (из этой, перевесившей пары). .

9.1 Ответ. $\frac{12}{11}V$. **Указание.** См. задачу 8.2.

9.2 Указание. Разложив во втором равенстве сумму кубов на множители, сократим обе части на равные сомножители $a + b = c + d$ (по условию положительности, эти сомножители не равны 0). Получим $(a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd$. Отсюда $ab=cd$. Таким образом, пары чисел (a; b) и (c; d) имеют одинаковую сумму и одинаковое произведение. Значит, они совпадают (с точностью до порядка); они являются корнями одного и того же квадратного уравнения $x^2-(a+b)+ab=0$. Тогда очевидно, что $a^2+b^2=c^2+d^2$.

9.3 <u>Указание</u>. См. задачу 8.5

9.4 <u>Указание</u>. Если треугольник ABC – равносторонний, то проведем среднюю линию $A_1C_1 \parallel AC$ и соединим A_1 с C – получим искомое разбиение. Пусть теперь Δ ABC неравносторонний и пусть, для определенности $\angle C$ больше 60°. Могут быть три случая: 1) $\angle A > 60°$; 2) $\angle A = 60°$; 3) $\angle A < 60°$. Разбиение в каждом из случаев указано на рисунках. Отметим, что в третьем случае такое разбиение возможно, т.к. из теоремы о сумме углов треугольника следует, что $\angle AMC > 60°$.



9.5 <u>Ответ</u>. Могло. **<u>Указание</u>.** Рассмотрим следующий пример. См. пример. Первая группа состоит из двадцати чисел:

5, 8, 15, 16, 25, 24, 35, 32, 45, 48, 55, 56, 65, 64, 75, 72, 85, 88, 95, 96

(здесь на нечетных местах стоят числа, оканчивающиеся на 5, а на четных – числа, кратные 8, кроме 40 и 80). Далее (правее) идет вторая группа :

10, 4, 20, 12, 30, 28, 40, 36, 50, 44, 60, 52, 70, 68, 80, 76, 90, 84, 100, 92

(здесь на нечетных местах стоят числа, кратные 10, а на четных – числа, дающие при делении на 8 остаток 4, кроме 20 и 60, т.к. они использованы на нечетных местах).
По построению, произведение любых соседних чисел в этом ряду делится на 40.

10.1 **<u>Ответ.</u>** 31. **<u>Указание</u>.** Первый множитель $\sqrt{2009-x^2}$ имеет два корня $x=\pm\sqrt{2009}$ и накладывает ограничение на область определения $|x|\le\sqrt{2009}$. Приравнивая нулю второй множитель, получим

$$|1-\cos x|=\sin x \Leftrightarrow \begin{cases}(1-\cos x)^2=\sin^2 x\\ \sin x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x(\cos x-1)=0\\ \sin x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \end{array}\right. \quad (n,k\in Z).$$

Таким образом, требуется найти количество чисел вида $2\pi n$ и $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ на отрезке $\left[-\sqrt{2009},\sqrt{2009}\right]$. Заметим, что $2\pi\cdot 7<2\cdot 3{,}15\cdot 7=44{,}1$ и $(44{,}1)^2<2009$, т.е. $2\pi\cdot 7<\sqrt{2009}$.

Но $\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 7=\frac{\pi}{2}\cdot 29>\frac{3{,}14}{2}\cdot 29>45$ и $45^2>2009$, т.е. $\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 7>\sqrt{2009}$. Значит, на отрезке $\left[-\sqrt{2009},\sqrt{2009}\right]$ имеется (с учетом симметричных отрицательных корней и нуля) 7·2 + 1 = 15 корней первой серии ($2\pi n$) и 14 корней второй серии ($\frac{\pi}{2}+2\pi k$). С учетом двух корней $\pm\sqrt{2009}$, получаем ответ.

10.2 <u>Указание</u>. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена. По теореме Виета, $c-b+1=x_1x_2+x_1+x_2+1=(x_1+1)(x_2+1)$. Это число может быть простым только в том случае, когда один из корней равен нулю. Тогда $c=x_1x_2=0$.

10.3 <u>Ответ.</u> 49. **<u>Указание</u>.** Требуется подсчитать количество натуральных делителей числа 1 000 000 $=2^6\cdot 5^6$. Любой такой делитель имеет вид $2^i\cdot 5^j$, где целые i, j могут принимать семь значений: от 0 до 6. Тогда различных упорядоченных пар $(i; j)$ будет 7·7 = 49.

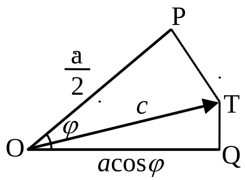
10.4 <u>Ответ.</u> 40**. <u>Указание</u>.** Заметим, что среди выбранных чисел в любой паре соседей должно быть хотя бы одно число, кратное пяти. Но поскольку всего от 1 до 104 имеется 20 чисел, кратных пяти, то выбранных чисел на окружности не может быть 42 (или более). Если выбрано 41 число, то возьмем какое-нибудь, кратное пяти, и рассмотрев оставшиеся 40 чисел, опять придём к

противоречию с требуемым условием (т.к. среди этих чисел не более 19, кратных пяти). Значит, всего выбранных чисел не более 40.
Пример на 40 чисел существует, он получается из примера задачи 9.5, если во второй группе чисел заменить последнее число 92 на 104 и «завернуть» ряд вдоль окружности так, чтобы 104 соседствовало с 5 – первым числом первой группы.

10.5 **<u>Указание</u>.** Пусть M_1M_2 – отрезок между центрами описанных окружностей. Ортогональная проекция M_1M_2 на прямую AB равна половине стороны AB, т.е. $\frac{a}{2}$ (т.к. M_1 и M_2 проектируются в середины отрезков AM и MB).
Проекция M_1M_2 на прямую AD равна

$$(a\cos\varphi + \frac{b}{2}) - \frac{b}{2} = a\cos\varphi .$$

Итак, известны проекции вектора $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на два луча AB и AD, составляющие угол φ. Отсюда однозначно определяется длина c.



Приведем вычисление для пункта б) задачи 11.5 (для задачи 10.5 этого не требуется), – см. рисунок.
Четырехугольник $OPTQ$ – вписанный, отрезок $c = OT = 2R$ - диаметр описанной вокруг него окружности.

По теореме синусов для треугольника OPQ имеем $PQ = 2R\sin\varphi$, а по теореме косинусов

$$PQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\cos\varphi)^2 - 2\frac{a}{2}\cdot a\cos\varphi\cdot\cos\varphi = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ т.е.}$$

$2R\sin\varphi = \dfrac{a}{2}$. Значит $c = 2R = \dfrac{a}{2\sin\varphi}$.

11.1 **<u>Ответ.</u>** 31. **<u>Указание</u>.** См. решение задачи 10.1. Приравнивая второй множитель левой части к нулю и возводя уравнение в квадрат, приходим к тому же самому тригонометрическому уравнению, что и в задаче 10.1.

11.2 **<u>Указание</u>.** Задача решается аналогично задаче 10.2:. по теореме Виета выражение приводится к виду $a(x_1+1)(x_2+1)$.

11.3 **<u>Ответ.</u>** Существует. **<u>Указание</u>.** В качестве примера можно привести геометрическую прогрессию $1; q; q^2; q^3$, где $q=(1+\sqrt{5})2;$ для этой прогрессии выполняется равенство $1+q^3=2q^2$ (которое с учетом неравенства $q\neq 1$ равносильно квадратному уравнению $q^2 - q - 1=0$).

11.4 **<u>Ответ.</u>** **<u>Указание</u>.** Пусть для определенности, $a\geq b$. Обозначим за m полусумму чисел $a + b = c + d$. Тогда $a=m + x$, $b=m - x$ для некоторого $x\geq 0$, и аналогично, $c=m + y$, $d=m - y$ для некоторого $y\geq 0$. Рассмотрим функцию $f(x)= (m+x)^{100} + (m-x)^{100}$. Эта функция монотонно возрастает при $x\geq 0$ т.к. её производная, равная $100((m+x)^{99} - (m-x)^{99})$, положительна при $x\geq 0$ (что, в свою очередь, следует из монотонности степенной функции нечетной степени).

Значит, *f(x)= f(y)* лишь при условии *x=y*.Таким образом, a=c и b=d, откуда следует результат.

11.5 **Ответ.** **б)** $\dfrac{a}{2\sin\varphi}$. **Указание.** См. задачу 10.5

2010-2011

7.1 **Ответ.** **7,5 м.**. **Указание.** Пусть *v* (м/час) – скорость машин до знака, *u* (м/час) – скорость машин после знака. Вторая машина проедет знак позже первой на 10/v (час). За это время первая машина проедет *10u/v* (метров) =10·6/8 =7.5 метров. Этот интервал и будет сохраняться после знака.

7.2 **Ответ.** **5 квадратов.** **Указание.** 6 квадратов вырезать не удастся, т.к. даже самые маленькие 6 квадратов занимают площадь 1+4+9+16+25+36=91, что превосходит площадь прямоугольника. (Другое рассуждение, приводящее к тому же выводу без привлечения площадей, основано на следующем: если мы поместим два квадрата со стороной 6 и 5, то они примыкают друг к другу, и тогда для квадрата со стороной 4 не хватит места, т.к. 5+4>8).

5 квадратов со сторонами от 1 до 5 разместить очень просто (например, поместим квадрат со стороной 5 в угол прямоугольника и приставим к одной его «свободной» стороне квадрат со стороной 4, а к другой – квадраты со сторонами 3 и 2).

7.3 **Ответ.** **727 023**. **Указание.** Заметим, что зачёркнута была последняя цифра, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра числа была бы нулевой. Пусть *y* – последняя цифра исходного числа, *x* – пятизначное число после зачёркивания. Тогда полученное число равно *10x+y–x = 9x+y* =654 321. Деля это число на 9 с остатком (и учитывая, что *y* не превосходит 9), получим остаток *y=3* и частное *x*=727 02.

7.4 **<u>Ответ.</u>** а) Можно, б) нельзя.. **<u>Указание</u>. а)** Сосчитав сумму длин 1+2+…+9=45, разобьём палочки на три группы с суммой длин 15 в каждой. Это можно сделать, например, так: 9+6=8+7=6+5+4+3+2+1. Палочки каждой группы приставим друг к другу, сложив тем самым соответствующую сторону треугольника. **б)** Сумма 10 палочек равна 55, она не делится на 3, и поэтому сложить треугольник нельзя.

7.5 **<u>Ответ.</u>** а) Да, обязательно, б) нет.. **<u>Указание</u>. а)** Вычитая эти два числа $2a+b$ и $2b+a$, получаем, что разность $a-b$ делится на 10, т.е. a и b оканчиваются на одну и ту же цифру. **б)**. Можно взять, например, $a=1$ и $b=6$, тогда оба числа $3a+b$ и $3b+a$ оканчиваются на 9.

8.1 . **<u>Указание:</u>** <u>см. задачу 7.1</u>

8.2 **<u>Указание:</u>** <u>см. задачу 7.3</u>

8.3 **<u>Ответ.</u>** угол A=60°, угол B= 20°. **<u>Указание</u>.** Треугольники *ABM* и *AMC* – равнобедренные, поэтому углы при их основаниях равны. Обозначим эти углы x и y соответственно. Тогда по свойству внешнего угла *AMB* для треугольника *AMC*, имеем $x=2y$. Отсюда сумма углов *A* и *C* равна $4y=180°–100°$, значит $y=20°$.

8.4 **<u>Ответ.</u>** 14.. **<u>Указание</u>.** Ладью на шахматной доске назовём вертикальной, если на её вертикали нет других ладей. Аналогично, определим горизонтальные ладьи (в принципе, ладья может оказаться одновременно горизонтальной и вертикальной). Если имеется 8 вертикальных ладей, то больше на доске ладей нет (иначе новая ладья попала бы на чью-нибудь вертикаль из данных восьми ладей). Аналогично, если есть 8 горизонтальных ладей, то больше ладей нет. Покажем, что можно поставить 7 горизонтальных и 7 вертикальных ладей, что даст максимальное количество – 14 ладей. Действительно, их можно расположить на первой горизонтали и первой вертикали, кроме угловой клетки a1 (т.е. ладьи занимают клетки a2, a3,…,a8, b1, c1,…, h1).

8.5 **Ответ.** **а**) нет.. **Указание**. **а**) См. задачу 7.5 б) **б**) Пусть $s=a+b+c$. Уменьшая каждое из чисел $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ на s, получим числа $a–c$, $b–a$, $c–b$ (некоторые из них могут быть отрицательными), причём у этих чисел одинаковый остаток, скажем x, при делении на 10. Заметим, что сумма чисел a-b, b-c, c-a равна нулю, а с другой стороны, сумма их остатков при делении на 10 равна $3x$. Значит, x=0.

9.1 **Ответ.** 10100**.**

Указание. Возводя в квадрат выражение $a^2 = a + 100$, получим

$$a^4 = a^2 + 200a + 10000 = a + 100 + 200a + 10000 = 201a + 10100$$

. Отсюда получаем ответ задачи.

9.2 **Указание**. См. задачу 8.3

9.3 **Ответ.** Нельзя**.** **Указание.** Если бы такой треугольник можно было сложить, то в его основании должно было быть две палочки (в основании не могут быть три или четыре палочки: дело в том, что тогда оставшиеся три или две палочки нельзя разложить на две группы с одинаковой суммой, т.к. 16<11+12). Но даже если в основании будут две самые длинные палочки, (т.е.15+16), равнобедренный треугольник со сторонами 31, 25, 25 будет остроугольным, т.к. $(31)^2 < 2\,(25)^2$.

9.4 <u>Указание</u>. См. задачу 8.4

9.5 <u>Ответ.</u> р=3. **<u>Указание</u>.** Случай р=2 сразу после проверки исключаем. Имеем уравнение $p^2 + 160 = n^2$. Значит, произведение множителей ($n+p$) и ($n-p$) равно $160=2^5\cdot 5$. Разность этих множителей равна $2p$ и поэтому делится на 2, но не на 4. Тогда получаем два возможных варианта разложения 160 на два множителя с общим делителем, кратным 2, но не 4: это разложения $80\cdot 2$ и $16\cdot 10$. Первое разложение даёт p=39, но это не простое число, а второе разложение даёт p=3.

10.1 <u>Указание</u>. См задачу 9.1

10.2 <u>Ответ.</u> а) нет, **б)** нет. **<u>Указание</u>. а)** Возьмём неравнобедренный треугольник ABC и рассмотрим геометрическое место точек, из которых отрезок A_1C_1 виден под углом, равным углу B. Известно (по свойству вписанных углов), что это – две дуги окружностей с общей хордой A_1C_1 Та дуга, которая лежит «ниже» A_1C_1 (т.е. по ту же сторону от A_1C_1,что и AC) пересекает АС не только в середине, но и ещё в одной точке (симметричной этой середине относительно серединного перпендикуляра к A_1C_1). Можно привести и более конкретный пример: пусть ABC – прямоугольный неравнобедренный треугольник с прямым углом B; в качестве точки B_1 возьмём основание перпендикуляра из точки B. Нетрудно доказать, что этот пример удовлетворяет условию задачи.

б) Конечно, отрицательный ответ следует из пункта а), но можно получить независимое решение, рассмотрев такой пример: ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник с прямым углом B. Из точки B_1 (середины гипотенузы) проведём две взаимно перпендикулярные прямые (чтобы они не составляли с гипотенузой угол 45°). Тогда точки A_1 и C_1 (точки пересечения с катетами) не будут их серединами, а треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный и равнобедренный.

10.3 **<u>Ответ.</u>** можно. **<u>Указание</u>.** Пример расположения чисел: 1, 2, 5, 11, 12, 15, 21, 22, 25 . См. также указание к задаче 11.5, которое поясняет подобный пример.

10.4 **<u>Указание</u>.** См. задачу 9.5

10.5 **<u>Ответ.</u>** **а)** 4, **б)** 1024 **<u>Указание</u>.** Пункт **а)** нетрудно решить непосредственно, преобразовав искомое выражение к виду $(a+b+c)^2$ = 4. Однако оба пункта задачи проще решить, если заметить, что сумма коэффициентов любого многочлена равна значению этого многочлена при x=1. Поэтому сумма коэффициентов многочлена $(P(x))^n$ равна $(P(1))^n$ = s^n, где s – сумма коэффициентов многочлена $P(x)$. Подставляя в последнюю формулу значения из условия задачи, получаем ответ.

11.1 **<u>Ответ.</u>** Если a<1 или a>$\sqrt{2}$, то корней нет. Если $1\le a<\sqrt{2}$, то два корня. Если $a=\sqrt{2}$, то один корень. **<u>Указание</u>.** Результат получается при исследовании (с помощью производной) функции $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ из левой части уравнения. Эта функция определена и непрерывна на отрезке [0; 1], она возрастает от 1 до $\sqrt{2}$ на отрезке [0; 1/2], и убывает от $\sqrt{2}$ до 1 на отрезке [1/2; 1]. Отсюда получается ответ на вопрос задачи.

11.2 **<u>Ответ.</u>** x = -1. **<u>Указание</u>.** Левая часть уравнения не превосходит по модулю числа 2, а правая часть (по модулю) не меньше 2 (это следует из многих элементарных неравенств, например, неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, или, как в предыдущей задаче, можно исследовать функцию $y=x+1/x$), причем значение=2 (по модулю) достигается только при $x=1$ или $x=-1$. Проверив эти два возможных решения, получаем, что подходит $x=-1$.

11.3

<u>Указание</u>. Если ввести прямоугольные координаты, взяв за координатные оси рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, то искомое равенство проверяется непосредственно. Можно доказать его также, если воспользоваться формулой для длины медианы: а именно, в треугольнике *PMQ* квадрат медианы *MO* выражается из соотношения

$$4MO^2+PQ^2=2(MP^2+MQ^2)$$

(это, фактически, формула для квадратов сторон и диагоналей параллелограмма). Для нашей задачи возьмем за точки *P*,*Q* – концы любой диагонали параллелепипеда , *O* - центр параллелепипеда. Тогда $MP^2+MQ^2=const=C$ для всех четырех диагоналей, и значит каждая часть доказываемого равенства равна $2C$.

11.4 **<u>Указание</u>.** См. задачу 10.5

11.5 **<u>Ответ.</u>** **а)** Нельзя, **б)** можно. **<u>Указание</u>.** **а)** Предположим, от противного, что такое расположение возможно. Возьмём соседние тройки чисел и вычтем из суммы квадратов первой тройки сумму квадратов второй. Получим, что квадрат каждого числа на круге даёт тот же остаток при делении на 10, что и квадрат числа, расположенного по кругу через два. (другими словами, $(a_i)^2$ и $(a_{i+3})^2$ оканчиваются одной и той же цифрой при всех i) «Прыгая» от любого числа на круге через два (на третье), мы обойдём весь круг (так как 8 взаимно просто с тройкой). Значит, квадраты всех восьми чисел оканчиваются одной и той же цифрой. Но в каждой десятке подряд идущих натуральных чисел есть не более двух чисел, квадраты которых оканчиваются одинаковой цифрой (а именно, такими парами являются числа, оканчивающиеся на 1 и 9, на 2 и 8, на 3 и 7, на 4 и 6).Поэтому от 1 до 25 будет не более 6 чисел с одинаковыми последними цифрами квадрата (точнее, их не более пяти, т.к. от 21 до 25 таких пар не будет; а 5 чисел можно было бы, например, расставить так: 2, 8, 12, 18, 22). Противоречие. **б)** См. задачу 10.3

2011-2012

7.1. В начале каждого летнего месяца цена товара увеличивалась. В августе цена была на 7% больше, чем в июне. Средняя цена товара за три летних месяца оказалась на 4% больше цены в июне. На сколько процентов была повышена цена в июле?

Ответ. На 5%. **Указание.** Пусть x – цена товара в июне, y – цена в июле. Тогда из условий задачи имеем: $\frac{x+y+1{,}07x}{3}=1{,}04x$. Отсюда $y = 1{,}05\,x$.

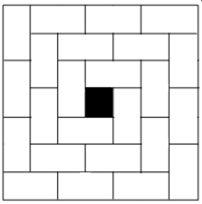
7.2. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр и получили 765. Найдите вторую цифру исходного числа.

Ответ. 8. **Указание.** Пусть $\overline{xyz}$ – искомое число. Тогда по условию

$$(100x+10y+z-(x+y+z)=765.$$

Отсюда $9(11x+y)=765$, $11x+y=85$. Поскольку $y\le 9$, для делимости числа $(85-y)$ на 11 цифра y должна быть равно 8. Тогда $x = 7$. Таким образом, однозначно определены две первых цифры исходного числа (третья цифра – любая).

7.3. Из доски размером 7×7 клеток вырезана центральная клетка. Можно ли оставшуюся доску разрезать по линиям сетки на "доминошки" (прямоугольники



2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных "доминошек" было одинаковым?

Ответ. Можно. **Указание.** См. рисунок.

7.4. В спичечной коробке 40 спичек. Как, используя все спички, составить квадрат и (отдельно) равносторонний треугольник? Приведите все возможные решения.

Ответ. Есть 3 решения: 1) $x = 1$, $y = 12$; 2) $x = 4$, $y = 8$; 1) $x = 7$, $y = 4$, где x(спичек) – сторона квадрата, y(спичек) – сторона треугольника. **Указание.** Пусть x (спичек) – сторона квадрата, y(спичек) – сторона треугольника. Тогда из условия задачи

$$4x + 3y = 40$$

$$3y = 4(10 - x)$$

Поэтому число $(10 – x)$ делится на 3, а значит, x равен либо 1, либо 4, либо 7. Соответственно, y принимает значение либо 12, либо 8, либо 4.

7.5. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 65 и записывается при помощи повторения одной и той же цифры.

Ответ. 555 555. **Указание.** Пусть в искомом числе повторяется цифра x, т.е. число имеет вид $\overline{xx...x} = x \cdot \overline{11...1}$. Поскольку $65 = 5 \cdot 13$, то в случае, когда $x \neq 5$, на 65 должно делиться число $\overline{11...1}$, которое меньше исходного в x раз. Значит, в минимальном числе, делящемся на 65, $x = 5$, а $\overline{11...1}$ делится на 13. Приписывая к числу 111 справа последовательно по единице и деля столбиком на 13, через 3 шага придем к делению без остатка: $111\,111 = 8547 \cdot 13$.

8.1. В начале каждого летнего месяца цена товара увеличивалась. В августе цена товара была на 7% больше, чем в июне. Средняя цена товара за три летних месяца оказалась на 4% больше цены в июне. На сколько процентов была повышена цена в июле?

Ответ. На 5%. **Указание.** См.7.1.

8.2. Из четырехзначного числа вычли сумму его цифр и получили 9765. Найдите вторую и третью цифры исходного числа.

Ответ. Вторая цифра 7, третья цифра 9. **Указание.** Пусть $\overline{xyzt}$ – искомое число. Рассуждая так же, как при решении задачи 7.2, получим уравнение $111x + 11y + z = 1085$. Поскольку $11y + z \le 99 + 9 = 108$, то $x \ge (1085 - 108)/11$, т.е. $x > 8$. Значит, $x = 9$, и тогда $11y + z = 86$ и (для делимости на 11) z должно равняться 9, поэтому $y = 7$.

8.3. На координатной плоскости начерчены два графика: $y = ax + b$ и $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ ($a > 1, b > 0$). Пусть A – точка пересечения первого графика с осью Ox, B – точка пересечения второго графика с осью Oy, C – точка пересечения графиков. Докажите, что ΔABC равнобедренный.

Указание. Приравнивая к нулю значении y и x для первой и второй функции, соответственно, получим, что точка A имеет координаты $x_A = -\frac{b}{a}$., $y_A = 0$; точка B имеет координаты $x_B = 0$, $y_B = -\frac{b}{a}$. Координата x точки C получаются из уравнения $ax + b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$, затем подставляя найденное значение x. в любую из функций, находим координату y точки C. Тогда $x_C = -\frac{b(a+1)}{a^2 - 1} = -\frac{b}{a-1} = y_C$. Таким образом, ΔABC

симметричен относительно прямой $y = x$, проходящей через точку C. Значит, $CA = CB$.

8.4. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Оказалось, что угол ACB тупой и $AB = CD$. Докажите, что угол ADC острый.

Указание. Предположим, от противного, что угол D не острый. Тогда в $\Delta\, ACD$ имеем $AC > CD$. Но в $\Delta\, ABC$ против тупого угла ACB лежит бóльшая сторона $AB > AC$. Таким образом, $CD < AC < AB$. Противоречие с условием $CD = AB$.

8.5. За круглым столом собрались рыцари и лжецы, всего 13 человек. (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Сидящие за столом знают, кто есть кто). На вопрос вновь пришедшего " Рыцарь или лжец сидит справа от тебя:?" 12 человек ответили: "лжец". Что ответил 13-й человек?

Ответ. "Рыцарь". **Указание.** Пусть A – тот 13-й человек, ответом которого мы интересуемся. Пронумеруем сидящих за столом подряд против часовой стрелки, начиная с соседа справа от A. Могут быть два случая: либо первый человек рыцарь, либо лжец. В первом случае второй человек – лжец, и тогда третий человек – рыцарь, и т.д. до 12-го человека рыцари и лжецы чередуются. Поскольку 12-й человек лжец, то 13-й – рыцарь, и, значит, про первого человека он скажет "рыцарь". Аналогично, во втором случае получаем чередующуюся последовательность лжецов и рыцарей, т.е. 12-й человек – рыцарь, а 13-й – лжец. Значит, про первого (лжеца) он скажет "рыцарь".

9.1. Докажите неравенство $|a+1| \le a^2 + a + 1$.

Указание. При $a \ge -1$ имеем неравенство $a + 1 \le a^2 + a + 1$, которое приводит к очевидному неравенству $a^2 \ge 0$. При $a < -1$ имеем $-a - 1 \le a^2 + a + 1$, которое можно записать в виде $(a+1)^2+1\geq 0$. Таким образом, при всех a исходное неравенство верно.

9.2. На координатной плоскости начерчены два графика: $y=ax+b$ и $y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$ ($a>1, b>0$). Пусть A – точка пересечения первого графика с осью Ox, B – точка пересечения второго графика с осью Oy, C – точка пересечения графиков. **а**) Докажите, что ΔABC равнобедренный. **б**) Может ли ΔABC быть прямоугольным?

Ответ. **б)** Нет, не может. **Указание.** а) См. задачу 8.3; б) Пусть O – начало координат. Из решения задачи 8.3. следует, что четырехугольник $AOBC$ симметричен относительно диагонали OC. Если, от противного, предположить, что $\angle ACB = 90°$, то мы получим, что $AOBC$ – квадрат, и тогда $x_A = x_C$. Но $x_A = -\dfrac{b}{a} \neq -\dfrac{b}{a-1} = x_C$ (см. решение задачи 8.3). Таким образом, получаем противоречие.

9.3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 104 и записывается при помощи повторения одной и той же цифры.

Ответ. 888 888 . **Указание.** См. аналогичную задачу 7.5 (здесь надо разложить $104 = 8\cdot 13$ и поэтому $x = 8$).

9.4. В треугольнике ABC угол B острый. Докажите, что медиана, проведенная из вершины B, больше половины любой из сторон ΔABC.

Указание. Пусть M – середина стороны AC, D – точка, симметричная вершине B относительно точки M. Тогда $ABCD$ – параллелограмм, в котором M – точка пересечения диагоналей. Угол BAD тупой, т.к. он равен $\angle BAC + \angle BCA = 180° - \angle B$.

Поэтому точки A и C лежат внутри окружности с центром M радиуса BM. Значит, отрезки AB, BC и AC меньше диаметра BD (= $2BM$) этой окружности.

9.5. За круглым столом собрались рыцари и лжецы, всего 13 человек. (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Сидящие за столом знают, кто есть кто). На вопрос вновь пришедшего " Рыцарь или лжец сидит справа от тебя:?" 12 человек ответили: "лжец". Что ответил 13-й человек?

Ответ. "Рыцарь". **Указание.** См. задачу 8.5.

10.1. Докажите неравенство $|a+1| \le a^2 - a + 2$..

Указание. При $a \ge -1$ неравенство приводим к виду $(a-1)^2 \ge 0$, а при $a < -1$ – к виду $a^2 + 3 \ge 0$.

10.2. Можно ли 2011 представить в виде суммы нескольких (больше двух) последовательных натуральных чисел?

Ответ. Нельзя. **Указание.** Пусть $(n+1) + ... + (n+k) = 2011$. Тогда из формулы сумы k членов арифметической прогрессии получим $k \cdot (2n + k + 1) = 2 \cdot 2011$. Поскольку 2011 – простое число (это можно проверить), то отсюда следует, что k равно либо 1, либо 2.

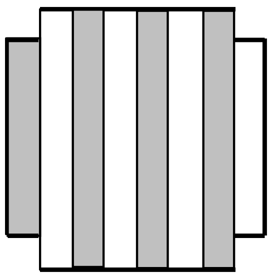
10.3. Дана последовательность, состоящая из n различных чисел: $a_1, a_2, ..., a_n$. Известно, что какие бы 15 членов последовательности ни взять, наименьший из них имеет наименьший номер, а наибольший из них – наибольший номер. Можно ли утверждать, что последовательность монотонно возрастающая, если: а) $n = 27$? б) $n = 26$?

Ответ. а) Можно; б) нельзя. **Указание.** а) Докажем, что последовательность монотонно возрастает. От противного, пусть при некотором k выполняется противоположное неравенство: $a_k > a_{k+1}$. Если $k \le 13$, то рассмотрим 15 членов последовательности $a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+14}$. Для них нарушается условие задачи, т.к. a_k не является наименьшим среди них. Если же $k \ge 14$, то можно рассмотреть 15 членов последовательности $a_{k-13}, a_{k-12}, ..., a_k, a_{k+1}$, и тогда также получим противоречие, т.к. a_{k+1} не является наибольшим среди них. б) Приведем контрпример: рассмотрим последовательность из 26 первых натуральных чисел:1,2,…,26 и поменяем местами 13 и 14. Тогда среди любых 15 членов этой последовательности ни наименьшим, ни наибольшим не может быть ни 13, ни 14. Таким образом, для этой немонотонной последовательности условие задачи выполняется.

10.4. Из доски размером $n \times n$ клеток вырезали 4 угловые клетки. Можно ли оставшуюся доску разрезать по линиям сетки на "доминошки" (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных "доминошек" было одинаковым, если: а) $n = 6$? б) $n = 8$?

Ответ. а) Можно; б) нельзя. **Указание.** а) Пример разрезания строится легко. Например, разрежем первую и последнюю горизонталь доски на 4 горизонтальных "доминошки", а первую и последнюю вертикаль – на 4 вертикальных "доминошки". Останется доска 4×4, которая разбивается на 4 горизонтальных и 4 вертикальных "доминошки" (для этого можно доску 4×4 разбить на четыре квадрата 2×2, из которых два квадрата разбить на горизонтальные, а два – на вертикальные "доминошки").

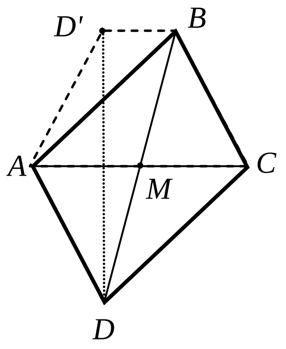
б) Предположим, от противного, что такое разбиение на "доминошки" возможно. Тогда получится 15 горизонтальных и 15 вертикальных



"доминошек". Раскрасим доску в 2 цвета, как показано на рисунке. Заметим, что любая горизонтальная "доминошка" занимает две клетки разного цвета, а любая вертикальная – две одноцветные клетки. На доске имеется по 30 клеток каждого цвета. 15 горизонтальных "доминошек" займут по 15 клеток каждого цвета и для вертикальных "доминошек" останется также по 15 клеток каждого цвета. Но 15 – нечетное число, и поэтому белые вертикальные "доминошки" не могут занимать ровно 15 клеток.

10.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что существует тетраэдр, все грани которого представляют собой треугольники, равные треугольнику ABC.

Указание. Пусть M – середина стороны AC и D – точка, симметричная точке B относительно M. Тогда $ABCD$ – параллелограмм. Пусть точка D' симметрична точке D относительно прямой AC (см. рисунок). Тогда $AD'BC$ – равнобедренная трапеция. Поскольку угол ABC острый, то $BD > AC$ (см. указание к задаче 9.4), а т.к. углы BAC и BCA острые, то $D'B < AC$. Если мы будем вращать $\Delta\, ADC$ в пространстве вокруг неподвижной прямой AC, то точка D будет двигаться по окружности. Обозначим ее положение в момент t через D_t. Расстояние от D_t до M будет изменяться от $DB > AC$ до $BD' < AC$. Значит, наступит момент, когда $D_t\, B = AC$. В этот момент все грани тетраэдра $ABCD_t$ равны треугольнику ABC.



11.1. Сколько существует натуральных чисел n, которые удовлетворяет неравенствам $\sqrt[4]{10n} < \sqrt{n} < \sqrt[3]{100n}$?

Ответ. 9989. **Указание.** Поскольку все части двойного неравенства положительны, неравенства можно возводить в степень. Возводя в четвертую степень неравенство $\sqrt[4]{10n} < \sqrt{n}$, получим $n > 10$. Возводя в шестую степень неравенство $\sqrt{n} < \sqrt[3]{100n}$, получим $n < 10000$. Таким образом, всего существует 10000 – 10 – 1 = 9989 чисел.

11.2. Можно ли 2011 представить в виде суммы нескольких (больше двух) последовательных натуральных чисел?

Ответ. Нельзя. **Указание.** См. задачу 10.2.

11.3. Дана последовательность, состоящая из n различных чисел: $a_1, a_2, ..., a_n$. Известно, что какие бы 15 членов последовательности ни взять, наименьший из них имеет наименьший номер, а наибольший из них – наибольший номер. Можно ли утверждать, что последовательность монотонно возрастающая, если: а) $n = 27$? б) $n = 26$?

Ответ. а) Можно; б) нельзя. **Указание.** См. задачу 10.3.

11.4. Решите уравнение $3\sin x + 4\cos x = 2^{x+3} + 2^{-x}$.

Ответ. Нет решений. **Указание.** Левая часть уравнения при помощи введения вспомогательного угла приводится к виду $5\sin(x+\alpha)$. Значит, она не превосходит 5. Для правой части в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (для положительных чисел) имеем: $2^{x+2} + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^{x+3} \cdot 2^{-x}} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} > 5$.

11.5. а) Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что существует тетраэдр, все грани которого представляют собой треугольники, равные треугольнику ABC. б) Существует ли тетраэдр, у которого в основании лежит тупоугольный треугольник, а периметры всех граней одинаковы?

11.5 **<u>Ответ.</u>** б) Не существует. **<u>Указание</u>.** а) См. задачу 10.5. б) Предположим, от противного, что такой тетраэдр *ABCD* существует. Из равенства периметров $\Delta\, ADC$ и $\Delta\, ABC$ получим равенство $AD + DC = AB + CB$, а из равенства периметров $\Delta\, ADB$ и $\Delta\, CDB$ получим равенство $AB + AD + CD + CB$. Складывая эти равенства, будем иметь $2AD = 2BC$, т.е. $AD = BC$. Аналогично получим, что в тетраэдре все противоположные (скрещивающиеся) ребра попарно равны, т.е. все грани представляют собой равные треугольника, причем в каждой вершине тетраэдра плоские углы трехгранного угла равны соответствующим углам треугольника *ABC*. Но тогда тупой угол (скажем, угол *B*) больше суммы двух других углов ($\angle A + \angle C$). Но это противоречит известному свойству (неравенству треугольника для плоских углов) трехгранного угла.

2012-2013

7.1. **<u>Ответ</u>**. 04 или 40 или 76. **<u>Указание</u>**. Заметим, что 36 = 9·4. По признаку деления на 9 сумма двух последних цифр полученного числа может быть либо 4, либо 13. В первом случае искомые две цифры – это 04 или 40 (другие варианты 13, 22 и 31 не подходят из-за признака деления на 4). Во втором случае получаем только вариант 76 (т.к. варианты 94, 85, 67, 58 и 49 не подходят). Другой способ решения: поделим с остатком 201200 на 36, неполное частное равно 5588, умножим следующие числа, а именно 5589, 5590, 5591 на 36, тогда последние две цифры произведения дадут ответ.

7.2. **<u>Ответ</u>**. 28 лет. **<u>Указание</u>**. До нового учебного года суммарный возраст учителей был равен 49·20 = 980. В новом году он стал равен 48·21 = 1008. Значит, новому учителю 1008 – 980 = 28 лет.

7.3. **<u>Указание</u>**. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей и пусть, для определенности, точка *M* лежит внутри треугольника *BOC*. Тогда

$$\angle BMD + \angle AMC = \angle BMA + \angle AMD + \angle AMD + \angle DMC >$$

$$> \angle BMA + \angle AMD + \angle DMC = 360° - \angle BMC > 180°.$$

Поэтому углы $\angle AMC$ и $\angle BMD$ не могут быть оба нетупыми.

7.4. **<u>Ответ.</u>** Коля прав. **<u>Указание</u>**. Если выписано 2012 цифр, то число *n* должно быть трехзначным: действительно, в случае двузначного *n* было бы выписано не более $9 + 2 \cdot 90 = 189$ цифр, а в случае четырехзначного (или более) – было бы выписано более $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$ цифр. Пусть *k* – количество выписанных трехзначных чисел ($k = n - 99$). Тогда общее количество выписанных цифр равно $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot k$, поэтому оно не может равняться 2012 (т.к. 2012 не делится на 3).

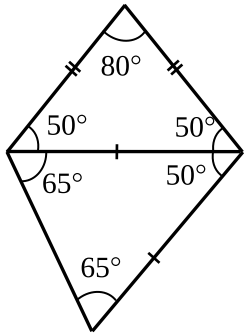
7.5. **<u>Указание</u>**. Пусть $a < b < c$ – три наибольших числа среди данных. Если $a \geq 17$, то $a + b + c \geq$ 17+18+19 = 54, и утверждение доказано. Рассмотрим теперь случай $a \leq 16$ и предположим противное к утверждению задачи. Тогда $a + b + c < 54$, а остальные (меньшие) семь чисел из данных десяти в сумме дают число не более 15+14+13+12+11+10+9 = 84. Значит, сумма всех десяти чисел не более 54+84 = 138 < 144, т.е. получили противоречие.

8.1. **<u>Ответ.</u>** 04 или 40 или 76. **<u>Указание</u>**. См. задачу 7.1.

8.2. **<u>Ответ.</u>** 2 и 5. **<u>Указание</u>**. Обозначим через *A* и *B* числа, соответствующие первой и второй звездочкам. Тогда перемножая скобки по алгебраическим правилам и приравнивая коэффициенты при *x* и свободные члены, получим: $14 - 2A = 10,\ -5A = -2B$. Отсюда $A = 2$, $B = 5$.

8.3. **Указание**. См. задачу 7.5.

8.4. **Ответ**. Нельзя. **Указание**. См. пример на рисунке.



8.5. **Ответ.** Время до встречи – 1 час. Скорость первого велосипедиста больше скорости второго в 1,5 раза. **Указание**. Пусть v_1, v_2 – скорости велосипедистов, t – время до встречи. Тогда первый велосипедист проехал до встречи путь $v_1 t$, а второй – путь $v_2 t$. Из условий задачи тогда будем иметь $\frac{v_2 t}{v_1} = 40(\text{мин.})$ и $\frac{v_1 t}{v_2} = 90(\text{мин.})$. Из этих уравнений получим, исключая t, что $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, т.е. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$. Тогда значение $t = 60$ (мин).

9.1. **Ответ.** $x_1 = 1+\sqrt{102},\ x_2 = 9$. **Указание**. Если $x^2 - 100 \geq 0$, т.е. при условии $|x| \geq 10$, имеем уравнение $x^2 - 2x - 101 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{102}$. Корень $1+\sqrt{102}$ удовлетворяет условию $|x| \geq 10$, а корень $1-\sqrt{102}$ – нет. Если $|x| < 10$, то имеем уравнение $x^2 + 2x - 99 = 0$, $x = -1 \pm 10$, и условию $|x| < 10$ удовлетворяет только корень $x = 9$.

9.2. **Указание**. Пусть ABC – данный треугольник и построены круги на сторонах AB и BC как на диаметрах. Если предположить противное, то найдется точка M внутри треугольника, которая лежит вне этих кругов. Тогда углы $\angle AMB$ и $\angle BMC$ острые и, значит, их сумма меньше 180°. Прибавив к этой сумме $\angle AMC < 180°$, получаем противоречие (т.к. в результате должно получиться 360°).

9.3. **Ответ**. **а)** Нет. **б)** Да, можно. **Указание**. **а)** В качестве примера можно взять числа $a = \sqrt{2}+1$, $b = \sqrt{2}-1$. **б)** Пусть числа $x = a+b$ и $y = a^3 + b^3$ рациональны. Тогда $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = y + 3x \cdot ab$. Отсюда $ab = \dfrac{x^3 - y}{3x}$ – рациональное число. Поэтому число $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ также рационально.

9.4. **Указание**. Пусть ABC – данный треугольник, O – точка пересечения высот. Пусть для определенности площади треугольников упорядочены так:

$$S_{AOB} \le S_{BOC} \le S_{AOC}. \qquad (*)$$

а) Предположим, от противного, что в точке O все высоты делятся в отношении, большем 2. Рассмотрим высоту BK, тогда по предположению $BO >$ 2 OK и поэтому $BK > 3OK \Rightarrow S_{ABC} > 3S_{AOC} \Rightarrow S_{AOB} + S_{BOC} > 2\,S_{AOC}$ Но это противоречит неравенству $(*)$. **б)** Аналогично, предположим, от противного, что все высоты делятся в отношении, меньшем 2, и рассмотрим высоту из точки C. Тогда аналогично пункту а), в результате получим неравенство $S_{AOC} + S_{BOC} < 2\,S_{AOB}$, противоречащее $(*)$

9.5. **Ответ**. Скорость первого велосипедиста больше скорости второго в 1,5 раза. **Указание**. См. задачу 8.5.

10.1. **Ответ**. $x_1 = 5 + \sqrt{215}$, $x_2 = -5 + \sqrt{35}$. **Указание**. Если $x^2 - 100 \ge 0$, т.е. при условии $|x| \ge 10$, имеем уравнение $x^2 - 10x - 190 = 0$, $x = 5 \pm \sqrt{215}$. Корень $5 + \sqrt{215}$

удовлетворяет условию $|x| \geq 10$, а корень $5-\sqrt{215}$ – нет. Если $|x|<10$, то имеем уравнение $x^2+10x-10=0$, $x=-5\pm\sqrt{35}$, и условию $|x|<10$ удовлетворяет только корень $x=-5+\sqrt{35}$.

10.2. **<u>Указание</u>**. Обозначим длины боковых сторон через *a*, *b*, *c*. Тогда квадраты сторон ΔABC по теореме Пифагора равны a^2+b^2, b^2+c^2, a^2+c^2. Поэтому сумма квадратов любых двух сторон основания больше квадрата третьей стороны, а это означает, что ΔABC – остроугольный.

10.3. **<u>Ответ</u>**. **а)** Нет. **б)** Да, можно. **<u>Указание</u>**. См. задачу 9.3.

10.4. **<u>Ответ</u>**. Нет, не может. **<u>Указание</u>**. Пусть $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. По свойству биссектрисы получаем соотношения в треугольниках *ABK* и *BCK*: $\frac{AK}{c}=\frac{7}{10}=\frac{KC}{a}$. Обозначим $t=\frac{7}{10}$. Отсюда $AK=ct,\ KC=at$. Тогда $b=(a+c)t$. Чтобы узнать, является ли угол *B* тупым, нужно рассмотреть знак выражения $a^2+c^2-b^2=a^2+c^2-(a+c)^2t^2=$
$=(1-t)^2a^2-2t^2ac+(1-t)^2c^2=$
$c^2((1-t)^2x^2-2t^2x+1-t^2)$, где $x=\frac{a}{c}$ У квадратного трехчлена $(1-t)^2x^2-2t^2x+1-t^2$ дискриминант равен $D=4\left(t^4-(1-t^2)^2\right)=4(2t^2-1)$. Значение $D<0$, т.к. $t^2=\frac{49}{100}<\frac{1}{2}$. Значит, квадратный трехчлен при всех *a, c* принимает положительные значения. Итак, $a^2+c^2-b^2>0$ и поэтому угол *B* – острый.

10.5. **Указание**. В разложении $2^{2012}-1=(2^{1006}+1)(2^{503}+1)(2^{503}-1)$ обозначим через *A*, *B*, *C* первый, второй и третий множители соответственно. Результат пункта **а)** будет следовать из взаимной простоты любой пары из чисел *A*, *B*, *C*. Проверим пару (*B*, *C*). Если бы *B* и *C* имели общий делитель >1, то на него делилась бы и разность $B - C = 2$, но это невозможно, т.к. *B* и *C* нечетны. Взаимная простота пар (*A*, *C*) и (*A*, *B*) следует из равенства $BC + 2 = A$ (только двойка могла бы быть общим делителем). Итак, взяв по одному простому делителю чисел *A*, *B*, *C*, получим три искомых простых числа.

б) Теперь получим дальнейшее разложение на множители чисел *B* и *A*.

Разложение числа $B=3\cdot\dfrac{2^{503}+1}{3}$. Действительно, $2^{503}+1=(3-1)^{503}+1$ делится на 3, поскольку произведение нечетного числа сомножителей вида $3k-1$ (и значит, нечетная степень числа такого вида) тоже имеет такой вид. Далее, поскольку 2^3 имеет вид $9k-1$, то $2^{501}=(2^3)^{167}$ будет иметь такой вид и поэтому $B=2^{503}+1=(9k-1)\cdot 4+1$ не делится на 9.

Разложение числа $A=5\cdot\dfrac{2^{1006}+1}{5}$. Действительно, $2^{1006}+1=(5-1)^{503}+1$, а числа вида $5k-1$ в нечетной степени тоже имеют такой вид, т.е. *A* делится на 5. Далее, поскольку $2^{10}=1024$ имеет вид $25k-1$, то $2^{1000}=(2^{10})^{100}$ будет иметь вид $25l+1$ (т.к. степень четная), и поэтому $A=2^{1006}+1$ будет иметь вид $(25l+1)\cdot 64+1$, т.е. *A* не делится на 25.

Число *A* можно еще разложить, если воспользоваться равенством

$2^{1006}+1=(2^{503}+1)^2-2\cdot 2^{503}=(2^{503}+1+2^{252})(2^{503}+1-2^{252})$.

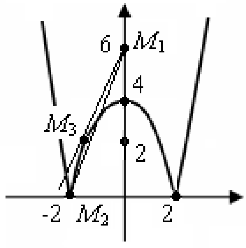
Здесь множители взаимно просты, т.к. их разность равна 2^{253}, т.е. четное число. В этом представлении числа A первая скобка делится на 5 (что проверяется аналогично предыдущему) и поэтому имеем разложение числа : $A=5\cdot\left(\dfrac{2^{503}+1+2^{252}}{5}\right)\cdot\left(2^{503}+1-2^{252}\right)$ на 3 взаимно простых множителя.

11.1. **<u>Ответ</u>**. $x\in\left\{-\sqrt{10},-\pi,-1,1,\pi,\sqrt{10}\right\}$. **<u>Указание</u>**. Найдем область определения. Имеем $11x^2-x^4-10\ge 0 \Leftrightarrow (x^2-10)(x^2-1)\le 0 \Leftrightarrow$ $-\sqrt{10}\le x\le -1$ или $1\le x\le\sqrt{10}$. При этом получаем четыре значения $x\in\left\{-\sqrt{10},-1,1,\sqrt{10}\right\}$, при которых подкоренное выражение обращается в нуль. Первый множитель уравнения $\sin 2x-\pi\sin x=2\sin x\left(\cos x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ обращается в нуль только при условии $\sin x=0$ (т.к. $\pi/2>1$). Таким образом, $x=k\pi\ (k\in Z)$, но в область определения попадают лишь два значения: $\pm\pi$ из указанной серии (неравенство $\pi<\sqrt{10}$ следует из неравенств $\pi<3{,}15$ и $(3{,}15)^2<10$).

11.2. **<u>Ответ</u>**. $-3<a<-2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2}<a<3$ **<u>Указание</u>**. Рассмотрим сначала случай $a>0$. Построим график $y=|x^2-4|$ на координатной плоскости и проведем касательную из точки $M_1(0;6)$ к ветви графика, расположенной между точками M_1 и $M_2(-2;0)$. Найдем точку касания $M_3(x_0;y_0)$. Эта точка удовлетворяет уравнению $y=4-x^2$, а также уравнению прямой

$y-6=kx$, где $k=y'(x_0)=-2x_0$, т.е. $y_0-6=(-2x_0)x_0$.

Из этих уравнений получаем $y_0=2$, $x_0=-\sqrt{2}$.



Прямая $y=ax+6$ пересекает график $y=|x^2-4|$ в четырех точках, когда угловой коэффициент этой прямой находится между угловыми коэффициентами прямых M_1M_2 и M_1M_3, значит,. $\frac{6-2}{\sqrt{2}}<a<\frac{6}{2}$, т.е. $2\sqrt{2}<a<3$. Аналогично, для отрицательных a получим симметричные границы: $-3<a<-2\sqrt{2}$.

11.3. **<u>Указание</u>**. **а)** См. задачу 10.2. **б)** Пусть $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Покажем, что в пространстве с прямоугольной системой координат можно отметить на координатных осях точки $A'(x,0,0)$, $B'(0,y,0)$ и $C'(0,0,z)$ так, чтобы $A'B'=AB$, $B'C'=BC$ и $A'C'=AC$, тем самым мы докажем наше утверждение (вершина S – начало координат). Действительно, имеем систему трех уравнений $x^2+y^2=c^2$, $y^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$. Ее решение $x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $y^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$, $z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$ существует, т.к. ΔABC – остроугольный и значит, $b^2+c^2>a^2, a^2+c^2>b^2, a^2+b^2>c^2$.

11.4. **<u>Ответ</u>**. Существует: $f(t)=\begin{cases} t^3-3t, & \text{если } t\ge 2, \\ t^2/2, & \text{если } 0<t\le 2. \end{cases}$

Указание. Значение $x+\frac{1}{x}\geq 2$ при всех положительных x (что следует из неравенства между средними арифметическим и геометрическим). Обозначим $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, т.е. $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t=f_1(t)$ (при $t\geq 2$). Далее, $2\cos x\leq 2$ при всех x. Обозначим $t=2\cos x$, тогда $\cos 2x+1=2\cos^2 x=\frac{t^2}{2}=f_2(t)$ (при $t\leq 2$). В общей точке $t=2$ областей определения $f_1(t)$ и $f_2(t)$ их значения совпадают: $f_1(2)=f_2(2)$ и значит, искомая функция существует.

11.5. **Указание**. См. задачу 10.5.

2013-2014

7 класс

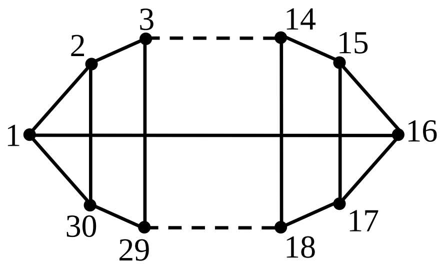
7.1. **Ответ**. 84 см^2. **Указание**. Из условий задачи меньшая сторона прямоугольника равна $3x$, а большая $7x$ при некотором x. Тогда периметр равен $2(3x+7x)=40$, откуда x =2. Площадь прямоугольника равна $3x\cdot 7x=21x^2=84$.

7.2. **Ответ**. 67. **Указание**. Пусть *a*, *b* – цифры задуманного числа. Тогда из условий задачи $10a+b+10b+a=143$, откуда $a+b=13$. Учитывая, что *a*, *b* – цифры, отсюда получаем шесть возможных вариантов задуманного числа: 94, 85, 76, 67, 58, 49. Из этих вариантов только 67 простое число.

7.3. **Ответ**. Нельзя. **Указание**. Сумма цифр данного числа равна 2·100 + 1·100 = 300. Из признаков делимости на 3 и на 9 следует, что данное число делится на 3, но не делится на 9. При перестановках цифр сумма цифр не меняется, и поэтому после перестановки не получится точный квадрат (т.к. число, возводимое в квадрат, должно делиться на 3, а его квадрат – на 9).

7.4. __**Ответ**__. Не может. __**Указание**__. Предположим, от противного, что после некоторого числа операций на доске оказались все равные числа. Заметим, что при любой операции четность чисел не меняется (т.к. $a + 2b$ имеет ту же четность, что a, и, аналогично, $b + 2a$ имеет ту же четность, что b). Вначале было 5 четных и 5 нечетных чисел, поэтому и в конце должно быть 5 четных и 5 нечетных чисел, а у нас оказались все 10 чисел одинаковой четности). Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

7.5. __**Ответ**__. Может. __**Указание**__. См. схему (граф), на которой отрезки соединяют пары друзей.



8 класс

8.1. __**Ответ**__. 67. __**Указание**__. См. задачу 7.2.

8.2. __**Ответ**__. 19796. __**Указание**__.

$$a_1 + a_2 + ... + a_{98} = (\underline{3}^2 - 1^2) + (\underline{\underline{4}}^2 - 2^2) +$$

$$+ (5^2 - \underline{3}^2) + (6^2 - \underline{\underline{4}}^2) ... + (99^2 - \underset{\sim}{97}^2) + (100^2 - \underset{\approx}{98}^2) .$$

Подчеркнутые члены при подсчете суммы взаимно уничтожаются с соответствующими членами, имеющими противоположный знак. Останутся «неуничтоженные» числа: $100^2+99^2-1^2-2^2=19796$.

8.3. **Ответ**. Нельзя. **Указание**. См. задачу 7.3.

8.4. **Ответ**. Не существует. **Указание**. Пусть *ABCD* – равнобедренная трапеция с боковыми сторонами *AB* и *CD*. Опустим из точки *C* высоту *CM* на основание. Тогда отрезок *AM* равен средней линии, т.к. средняя линия равна

$$\frac{1}{2}(BC+AD)=\frac{1}{2}(BC+BC+2MD)=BC+MD=AM .$$

В прямоугольном треугольнике *ACM* гипотенуза *AC* больше катета *AM*, и, значит, диагональ всегда больше средней линии равнобедренной трапеции.

8.5. **Ответ**. Не может. **Указание**. Заметим, что число $2a+3b$ имеет ту же четность, что b, а число, $2b+3a$ имеет ту же четность, что a. Поэтому после каждой операции на доске должно оставаться 5 четных и 5 нечетных чисел (т.к. вначале было 5 четных и 5 нечетных). Значит все 10 чисел одинаковой четности получиться не могут.

9 класс

9.1. **Ответ**. 19796. **Указание**. См. задачу 8.2.

9.2. **Ответ**. Не существует. **Указание**. См. задачу 8.4.

9.3. **Ответ**. Нельзя. **Указание**. После возведения в квадрат получим равносильное неравенство:

$$a-b>\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b} \Leftrightarrow \quad (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})>\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b} .$$

Поскольку $a>b$, то данное неравенство равносильно следующему: $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})>1$. Для малых *a*, *b* (например, при $a = 10^{-4}$, $b = 10^{-8}$) последнее неравенство, очевидно, неверно.

9.4. **Указание**. Из условия $C_1A_1 \parallel AC$ следует, что треугольники BC_1A_1 и BAC подобны. Пусть $x = C_1A_1 / AC$ – коэффициент подобия. Тогда высота в треугольнике BC_1A_1, опущенная из точки B на C_1A_1, равна xh, где h – высота треугольника BCA из точки B. Значит, высота в треугольнике $B_1C_1A_1$ из точки B_1 на C_1A_1 равна $h - xh = (1-x)h$. Таким образом, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}(x \cdot AC) \cdot (1-x)h = x(1-x)S_{\Delta ABC}$. Максимум квадратичной функции $y(x) = x(1-x)$ достигается в точке $x_0 = \frac{1}{2}$ (абсциссе вершины параболы) и равен $\frac{1}{4}$, откуда следует результат.

9.5. **Ответ**. **а**) не может, **б**) не может. **Указание**. **а**) Результат пункта а) (так же, как в задачах 7.4 и 8.5) следует из того факта, что после каждой операции получаются числа той же четности. **б**) Заметим более сильный факт, а именно, то, что после каждой операции числа дают те же остатки при делении на 6, что и до операции. Действительно, $a^3 + 6b - a = (a-1)a(a+1) + 6b$, и произведение трех последовательных целых чисел $(a-1)a(a+1)$ делится как на 3, так и на 2, т.е. делится на 6. Значит, в результате всех операций должен получиться тот же набор остатков (при делении на 6), что и вначале. Но вначале было не более двух чисел для каждого из остатков 0, 1, 2, 3, 4, 5 (точнее, по одному числу с остатком 0 и 5 – это числа 6 и 5 –, и по два числа с остальными остатками). Таким образом, в конце не могли оказаться три числа с одинаковыми остатками.

10 класс

10.1. **Ответ**. Нельзя. **Указание**. См. задачу 9.3.

10.2. **Ответ**. Не может. **Указание**. Поскольку $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ для положительных a, b, то в результате каждой операции сумма чисел на доске не может увеличиться. Вначале сумма чисел была $1+2^2+\ldots+10^2 = \dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$ (здесь использовалась формула $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для суммы первых n квадратов, но в данной задаче можно подсчитать эту сумму непосредственно), а в конце сумма чисел будет больше 40·10=400, если мы предположим противное. Полученное противоречие показывает, что такое предположение неверно.

10.3. **Ответ**. $a = -\dfrac{3}{8}$. **Указание**. Из условий задачи следует, что должно выполняться условие $D = 4(4a^2 - 5a) > 0$ и равенство $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4a)^2 - 1`0a = 6$ (здесь мы использовали теорему Виета). Решая последнее уравнение относительно a, получим $a = \dfrac{5 \pm 11}{16}$. Корень $a_2 = -\dfrac{3}{8}$ этого уравнения удовлетворяет неравенству $4a^2 - 5a > 0$, а корень a_1=1 – нет.

10.4. **Ответ**. 30° или 150°. **Указание**. Пусть K – точка пересечения AO и MN. По свойству вписанной окружности, $MK = KN$, $AK \perp MN$, и $\angle AMO = 90°$.

Обозначим $\alpha = \angle MAO$. Тогда $MK = AM\sin\alpha = (AO\cdot\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$, и по условию, $AO\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{4}AO \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$ либо $2\alpha = 150^\circ$ (т.е. $\alpha = 15^\circ$ либо $\alpha = 75^\circ$).

10.5. **Указание**. Перепишем уравнение в виде $y^2 = x^4(2013x+1)$. Разрешимость этого уравнения в натуральных числах равносильна тому, что скобка $2013x + 1$ представляет собой точный квадрат:

$$2013x+1=t^2 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)=2013x.$$

В качестве t достаточно взять числа вида $t = 2013k+1$, где k – любое натуральное число. Тогда $2013k(2013k+2) = 2013x \Leftrightarrow x = k(2013k+2)$. Отсюда $y = x^2t = k^2(2013k+2)^2(2013k+1)$. Поскольку k – любое натуральное число, утверждение доказано.

11 класс

11.1. **Ответ**. $x = 0$. **Указание**. Левая часть уравнения не превосходит единицы, причем она может равняться единице лишь при условии одновременного выполнения двух равенств: $\cos^2(\sqrt{2}x)=1$ и $\sin 2x = 0$. Отсюда $\sqrt{2}x = \pi n$ и $2x = \pi k$, $k, n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\frac{\pi n}{\sqrt{2}} = \frac{\pi k}{2}$, т.е. $2n = \sqrt{2}k$ при некоторых целых n, k. Поскольку $\sqrt{2}$ – иррациональное число, то из последнего равенства следует, что k обязано равняться нулю. Значит, $k = n = 0$.и $x = 0$.

11.2. Ответ. $a = 2$. **Указание**. См. задачу 10.3.

11.3. **Ответ.** $x \in (-\infty, -\sqrt{5}+1] \cup \{0\} \cup \{2\} \cup [1+\sqrt{5}, +\infty)$.

Указание. Обозначим $u = \sqrt{x^2 - 2x}$. Имеем: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ или $x \geq 2$. Для функции $f(f(x)) = f(u)$ область определения должна удовлетворять совокупности неравенств $u \leq 0$ или $u \geq 2$, т.е. $\sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$ или $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 2$. Первое из этих неравенств может выполняться лишь в случае нулевого подкоренного выражения, т.е. при $x = 0$ или $x = 2$. Решим второе неравенство: $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{5}$, или $x \geq 1 + \sqrt{5}$.

11.4. **Указание**. Рассуждая аналогично тому, как при решении задачи 10.4, обозначим через x коэффициент подобия тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$. Тогда площади оснований тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ относятся как x^2, а высоты – как $(1 - x)$. Получаем задачу на максимум для функции $y = x^2(1-x)$. Решая эту задачу с помощью производной $y' = 2x - 3x^2$, находим критическую точку $x_0 = \frac{2}{3}$, в которой достигается максимум $y(x_0) = \frac{4}{27}$.

11.5. **Указание**. См. задачу 10.5.

2014-2015

7.1. **Ответ**: 4 часа 30 минут. **Указание**. Пусть a – расстояние между пунктами A и B, v – запланированная скорость.

Тогда $\frac{a}{v}=5$. Увеличенная скорость равна $1{,}25\,v$. Весь путь велосипедист проедет за $\frac{a}{2v}+\frac{a}{2\cdot 1{,}25v}=\frac{4{,}5}{5}\frac{a}{v}=4{,}5$ (час).

7.2. **<u>Указание</u>**. Первым взвешиванием Вася делит все монеты на две равные по весу кучки и получает две кучки по 40 рублей. Далее он аналогично делит одну кучку в 40 рублей на две равных. Еще 2 раза проделав такие взвешивания, он в результате будет иметь две кучки по 5 рублей и три кучки в 10, 20 и 40 рублей. Сложив кучки в 5 и 20 рублей, он получит нужную сумму.

7.3. **<u>Ответ</u>**: сможет. **<u>Указание</u>**. $0{,}07=0{,}02+0{,}05=\frac{1}{50}+\frac{1}{20}$.

7.4. **<u>Ответ</u>**: нет, нельзя. **<u>Указание</u>**. Приведем такой пример: квадрат со стороной 5/6 разрежем на два прямоугольника длины 5/6 и ширины 1/6 и 4/6. Тогда периметры прямоугольников равны $2\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=2$ и $2\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)=3$.

Комментарий. Прийти к подобному примеру можно так: пусть a – сторона квадрата, x – ширина одного из прямоугольников. Тогда $(a-x)$ ширина другого прямоугольника, а их периметры равны $2(a+x)$ и $2(2a-x)$. Сумма этих периметров равна $6a$, значит, a имеет вид $a=\frac{n}{6}$, где n – натуральное число. Поэтому $a+x=\frac{m}{2}$ (m – натуральное). При n = 5, m = 2 получается наш пример.

7.5. **<u>Ответ</u>**: **а)** нельзя; **б)** можно. **<u>Указание</u>**. Очевидно, суммарная длина всех палочек должна делиться на 3, чтобы можно было распределить их на три равные по длине части. **а)** Но сумма 1+2+…+100 не делится на 3 (чтобы в этом убедиться, не обязательно считать сумму 1+

2+…+100 = 101·50; можно разбить все 100 чисел так: (1+2+3) + (4+5+6) + … + (97+98+99) + 100, и во всех тройках сумма делится на 3, а 100 на 3 не делится). **б)** Разобьем все 99 чисел на последовательные девятки (1+2+…+9) + (10+11+…+18) + … + (91+92+…+99). Каждую такую девятку вида $9k+1$, $9k+2$, … $9k+9$ разобьем на три группы с одинаковой суммой, а именно: $9k+1 + 9k+5 + 9k+9 = 9k+2 + 9k+6 + 9k+7 = 9k+3 + 9k+4 + 9k+8$. Собирая палочки каждой из трех групп для разных $k = 0, 1, \ldots, 10$, мы получим три одинаковые суммарные длины.

8 класс

8.1. **<u>Ответ</u>**: 4 часа 30 минут. **<u>Указание</u>**. См. задачу 7.1.

8.2. **<u>Ответ</u>**: сможет. **<u>Указание</u>**. См. задачу 7.3.

8.3. **<u>Ответ</u>**: $\frac{5}{8}$. **<u>Указание</u>**. Пусть $S_{ABCD} = S$. Имеем $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4} S$. Далее, $S_{MCN} = \frac{1}{4} S_{BCD}$ (т.к. MN – средняя линия в треугольнике BCD), поэтому $S_{MCN} = \frac{1}{8} S$.

Тогда $S_{AMND} = S - \frac{1}{4} S - \frac{1}{8} S = \frac{5}{8} S$.

8.4. **<u>Ответ</u>**: **а)** нельзя; **б)** можно. **<u>Указание</u>**. См. задачу 7.5.

8.5. **<u>Ответ</u>**: да, сможет. **<u>Указание</u>**. Пусть x – вес 1-копеечной монеты, y – вес 2-копеечной монеты. Если проверяемый факт верен, то $(x + y)$ – вес 3-копеечной монеты, а $(x + 2y)$ – вес 5-копеечной монеты. Для того, чтобы в этом убедиться, мы проделаем два взвешивания: 1) 1коп. + 2коп. = 3коп. (?); 2) 2коп. + 3коп. = 5коп. (?). Если хотя бы одно из этих равенств не выполняется (весы не в равновесии), то проверяемый факт неверен. Если равенства выполнились, проверим, проведя еще два взвешивания, следующие равенства: 1коп. + 3коп.+ 5коп.

= 9 гр. (?) и 2коп. + 3 коп. + 5коп. = 1коп. + 9 гр. (?). Если хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то проверяемый факт неверен. Если же оба равенства выполняются, то имеем два уравнения: $x+x+y+x+2y=9$ и $y+x+y+x+2y=9+x$, из которых получим $x=1$, $y=2$, т.е. проверяемый факт верен.

9 класс

9.1. **<u>Ответ</u>**: нет решений. **<u>Указание</u>**. Заметим, что данное уравнение – квадратное (коэффициенты при x^3 уничтожаются). У данного квадратного трехчлена вершина находится в точке с абсциссой $x_0=\frac{100}{2}=50$; в этом можно убедиться либо непосредственным подсчетом, либо следующим образом: если ввести замену $t=x-50$, то квадратный трехчлен запишется в виде $f(t)=(50+t)(49+t)(48+t)$ + $(50-t)(49-t)(48-t)$, и легко видеть, что коэффициенты при нечетных степенях t уничтожаются, а значение при $t=0$ (ордината вершины) положительна, причем старший коэффициент (при t^2) также положителен. Значит, уравнение корней не имеет.

9.2. **<u>Ответ</u>**: **а)** не могло; **б)** могло. **<u>Указание</u>**. Обозначим через A начальную сумму четных чисел на доске, B – сумму нечетных чисел. Тогда должно выполняться равенство $\frac{A}{2}+2B=A+B \Leftrightarrow A=2B$. Значит, сумма на доске должна быть равна $A+B=3B=n$. В случае **а)** при $n=2014$ это приводит к противоречию с делимостью на 3. В случае **б)** при $n=2013$ легко проверить такой пример: на доске записаны два числа $a=1342$ и $b=671=a/2$.

9.3. **<u>Указание</u>**. Пусть $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $AC=e$ и пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается AC в точке M. Тогда из свойства касательных получим, что

$AM = \dfrac{a+e-b}{2}$. Аналогично, для окружности, вписанной в треугольник ACD и касающейся AC в точке N, получим: $AN = \dfrac{d+e-c}{2}$. Равенство $AM = AN$ равносильно равенству $a - b = d - c \Leftrightarrow a + c = b + d$, а последнее равенство – это известное условие для четырехугольника, в который можно вписать окружность.

9.4. **<u>Ответ</u>**: да, будут. **<u>Указание</u>**. Пусть $a = 20$, $b = 15$, v – скорость кораблей. Тогда расстояние между ними через время t после полудня равно (по теореме Пифагора) $\sqrt{(a-vt)^2+(b-vt)^2}$. Квадратный трехчлен $f(t) = (a-vt)^2+(b-vt)^2$ с положительным старшим коэффициентом $2v^2$ принимает наименьшее значение в вершине $t_0 = \dfrac{(a+b)v}{2v^2} = \dfrac{a+b}{2v}$. При этом значении $|a-vt_0| = |b-vt_0| = \dfrac{|a-b|}{2}$ и поэтому расстояние в момент t_0 равно $\dfrac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} < 4$ (легко видеть, что к моменту t_0 один из кораблей уже прошел точку O, а другой еще нет).

9.5. **<u>Ответ</u>**: да, сможет. **<u>Указание</u>**. См. задачу 8.5.

10 класс

10.1. **<u>Ответ</u>**: нет решений. **<u>Указание</u>**. См. задачу 9.1.

10.2. **<u>Ответ</u>**: **а)** не могло; **б)** могло. **<u>Указание</u>** : см. задачу 9.2

10.3. **<u>Ответ</u>**: да, будут. **<u>Указание</u>**. См. задачу 9.4.

10.4. **<u>Ответ</u>**: 60°. **<u>Указание</u>**. Пусть $\alpha = \angle ABC$. Тогда $\angle APC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$, поскольку

$\angle APC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$. Пусть $R = R_{ABC} = R_{APC}$. По известной формуле (для теоремы синусов) $AC = 2R\sin\alpha$ (в треугольнике ABC) и $AC = 2R\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$ (в треугольнике APC). Отсюда получаем уравнение $\sin\alpha = \sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow$ $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ$ (т.к. $\alpha < 180^\circ$).

10.5. **<u>Ответ</u>**: **б)** не существует. **<u>Указание</u>**. **а)** После возведения обеих частей в квадрат и отделения квадратного корня получим равносильное неравенство $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n(n+1) < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$.

б) Предположим, от противного, что такое n существует. Тогда для некоторого натурального k будет выполнено двойное неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < k \le \sqrt{9n+3}$. Рассмотрим неравенство $k \le \sqrt{9n+3} \Leftrightarrow k^2 \le 9n+3$. Заметим, что квадраты целых чисел не могут давать остатки 2 и 3 при делении на 9 (можно перебрать все возможные остатки, это числа 0, 1, 4, 7). Значит, неравенство $k^2 \le 9n+3$ означает фактически, что $k^2 \le 9n+1 \Leftrightarrow k \le \sqrt{9n+1}$. Поэтому получаем $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+1}$, что приводит к противоречию, т.к. на самом деле правая часть меньше левой при всех n (это доказывается точно так же, как в пункте а)).

11 класс

11.1. **<u>Ответ</u>**: $2\pi k \le x \le 2\pi k + \pi$, k – целое. **<u>Указание</u>**. Выражение в скобках под корнем положительно при всех x (см.

решение задачи 9.1). Осталось записать решение неравенства $\sin x \geq 0$.

11.2. **<u>Ответ</u>**: $\sqrt{2^2+19^2+53^2}$. **<u>Указание</u>**. Пусть a, b, c – стороны параллелепипеда. Имеем $abc = 2014$. Заметим, что числа a, b, c – натуральные, как следует из условий задачи (вершины с целочисленными координатами, а ребра параллельны координатным осям). Заметим также, что ни одно из чисел a, b, c не может равняться единице, т.к. вершины лежат *внутри* разных октантов. Поэтому разложив 2014 на простые множители $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, получим, что a, b, c – это (с точностью до порядка) числа 2, 19, 53. Поэтому диагональ равна $\sqrt{2^2+19^2+53^2}$.

11.3. **<u>Ответ</u>**: 60°. **<u>Указание</u>**. См. задачу 10.4.

11.4. **<u>Ответ</u>**: **б)** не существует. **<u>Указание</u>**. См. задачу 10.5.

11.5. **<u>Ответ</u>**: наименьшее значение равно –1, наибольшее значение равно 24. **<u>Указание</u>**. Обозначим $u = \cos x$, $u \in [-1;1]$. Тогда $y = f(u) = u(u+1)(u+2)(u+3)$ = $\big(u(u+3)\big)\big((u+1)(u+2)\big)$ = $(u^2+3u)(u^2+3u+2)$. Пусть $t = u^2+3u$. Заметим, что у квадратичной функции $t(u)$ координата вершины $u_0 = -3/2$ и поэтому $t(u)$ монотонно возрастает на промежутке [–1;1], принимая значения от –2 до 4. Далее, функция $y(t) = t(t+2)$ = $(t+1)^2-1$ принимает наименьшее значение равное –1 при $t = -1$, а на концах отрезка $[-2;4]$ принимает значения 0 и 24 соответственно, откуда следует результат.